

Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)
Matematică $M_{\text{șt-nat}}$
Clasa a XI-a
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

- Pentru fiecare răspuns se acordă fie 5 puncte, fie 0 puncte.
- Nu se acordă punctaje intermediare.

SUBIECTUL al II-lea și SUBIECTUL al III-lea

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	C	5p
2.	C	5p
3.	B	5p
4.	A	5p
5.	D	5p
6.	A	5p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$D(1) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} =$	2p
	$= 0 + 6 + 6 - 3 - 0 - 4 = 5$	3p
b)	$D(p) = p^2(6-p)$, pentru orice număr întreg p	3p
	Numerele p și $6-p$ sunt întregi, deci numărul întreg $D(p)$ este divizibil cu $6-p$	2p
c)	$D(n) = n^2(6-n)$, deci pentru $n=0$ și pentru orice $n \geq 6$, obținem $D(n) \leq 0$ și, cum n este număr natural, valoarea maximă pe care o poate lua $D(n)$ se obține pentru una dintre valorile $n=1$, $n=2$, $n=3$, $n=4$ sau $n=5$	3p
	Valoarea maximă este $D(4) = 32$	2p
2.a)	$B(1) + B(3) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} =$	3p
	$= 2 \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2B(2)$	2p
b)	$A \cdot B(x) = \begin{pmatrix} x-1 & -x \\ 0 & -x-1 \end{pmatrix}$, pentru orice număr real x	2p
	$B(x) \cdot A = \begin{pmatrix} -x-1 & 0 \\ -x & x-1 \end{pmatrix}$, pentru orice număr real x	2p
	$\begin{pmatrix} x-1 & -x \\ 0 & -x-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x-1 & 0 \\ -x & x-1 \end{pmatrix}$, de unde obținem $x=0$	1p

c)	$B(x) \cdot B(x) = \begin{pmatrix} x^2 - 1 & x + 1 \\ x - 1 & x^2 \end{pmatrix}$, pentru orice număr real x	2p
	$\begin{pmatrix} x^2 - 1 & x + 1 \\ x - 1 & x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x + 1 \\ x - 1 & 1 \end{pmatrix}$, de unde obținem $x = -1$ sau $x = 1$	3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-4)^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(1 - \frac{4}{x}\right)^2}{x^2} =$ $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{4}{x}\right)^2 = 1$	3p 2p
b)	$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 8x^2 + 16x}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x(x-4)^2 \cdot x}{(x-4)^2} = \lim_{x \rightarrow 4} x^2 =$ $= 16$	3p 2p
c)	$\frac{1}{a}(f(x+a) - f(x)) = \frac{1}{a} \left(a + \frac{16}{x+a} - \frac{16}{x} \right) = 1 - \frac{16}{x(x+a)}$, $x \in (0, +\infty)$, unde a este număr real, $a > 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{a}(f(x+a) - f(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{16}{x(x+a)} \right) = 1$, deci nu depinde de a	3p 2p
2.a)	Pentru orice număr real m , funcția f este continuă pe $(-\infty, 1)$ și pe $(1, +\infty)$ $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{x^2}{x-2} = -1$, $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} (\ln x + m) = m$ și $f(1) = m$, deci funcția f este continuă pe $\mathbb{R} \Leftrightarrow m = -1$	2p 3p
b)	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x(x-2)} = 1$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x-2} = 2$, deci dreapta de ecuație $y = x + 2$ este asimptotă oblică spre $-\infty$ la graficul funcției f	2p 3p
c)	Cum $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $f(0) = 0$ și f este continuă pe $(-\infty, 1)$, mulțimea valorilor funcției f conține intervalul $(-\infty, 0]$ Cum $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = m$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ și, cum f este continuă pe $(1, +\infty)$, mulțimea valorilor funcției conține intervalul $(m, +\infty)$ și, cum $m \leq 0$, funcția f este surjectivă	2p 3p