

CONCURSUL NAȚIONAL PENTRU OCUPAREA POSTURILOR /CATEDRELOR DECLARATE
VACANTE/REZERVATE ÎN ÎNVĂȚĂMÂNTUL PREUNIVERSITAR

2020

Probă scrisă
MATEMATICĂ

Model

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

- Se punctează orice modalitate de rezolvare corectă a cerințelor, în limita punctajului maxim corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

| | | |
|----|--|----------------|
| 1. | a) $a_4 = a_1 + 3r$, deci $a_1 + 3(\sqrt{2} - 1) = 3\sqrt{2}$ $a_1 = 3$ | 3p 2p |
| | b) $a_1 + a_2 + \dots + a_9 = 36\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{9(2a_1 + 8r)}{2} = 36\sqrt{2}$, deci $a_1 + 4r = 4\sqrt{2}$, unde r este rația progresiei $a_4 + r = 4\sqrt{2}$, de unde obținem $r = \sqrt{2}$ | 3p 2p |
| | c) Presupunem, prin reducere la absurd, că există doi termeni raționali a_p și a_q , cu $p \neq q$ și, cum $a_p = a_q + (p - q)r$, obținem $r = \frac{a_p - a_q}{p - q}$, deci r este număr rațional $a_4 = a_p + (4 - p)r$ și, cum a_p și r sunt numere raționale, rezultă că a_4 este număr rațional, ceea ce este o contradicție | 2p 3p |
| 2. | a) $BE \perp AC \Rightarrow \triangle ABE$ este dreptunghic, deci $\cos(\sphericalangle BAE) = \frac{AE}{AB}$ și, cum $\sphericalangle BAE$ are măsura de 60° , obținem $\frac{AE}{AB} = \frac{1}{2}$ $CF \perp AB \Rightarrow \triangle AFC$ este dreptunghic, deci $\cos(\sphericalangle CAF) = \frac{AF}{AC}$ și, cum $\sphericalangle CAF$ are măsura de 60° , obținem $\frac{AF}{AC} = \frac{1}{2}$, deci $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{1}{2}$ | 2p 3p |
| | b) $\sphericalangle BHF \equiv \sphericalangle CHE$ și, cum $\triangle BHF$ este dreptunghic în F și $\triangle CHE$ este dreptunghic în E , obținem $\triangle BHF \sim \triangle CHE$ $\frac{BH}{CH} = \frac{HF}{HE}$, deci $BH \cdot HE = CH \cdot HF$ | 3p 2p |
| | c) P aparține mediatoarei segmentului BH , deci $BP = PH$ și Q aparține mediatoarei segmentului CH , deci $CQ = HQ$, de unde obținem $BP + CQ = PH + HQ$ $\sphericalangle BHF$ și $\sphericalangle CHE$ au măsura de 60° și, cum $\sphericalangle BHP$ are măsura de 30° și $\sphericalangle QHC$ are măsura de 30° , obținem că $(HP$ și HQ sunt bisectoarele a două unghiuri opuse la vârf, deci sunt semidrepte opuse P , H și Q sunt coliniare în această ordine, deci $PH + HQ = PQ$, de unde $BP + CQ = PQ$ | 1p 3p 1p |

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

| | | |
|----|---|----------------|
| 1. | a) $f(x \circ y) = f(x) \circ f(y)$, deci $(x \circ y)^{-1} = x^{-1} \circ y^{-1}$, pentru orice $x, y \in G$ Cum $(x \circ y)^{-1} = y^{-1} \circ x^{-1}$, obținem $y^{-1} \circ x^{-1} = x^{-1} \circ y^{-1}$, de unde $x \circ y = y \circ x$, pentru orice $x, y \in G$, deci grupul (G, \circ) este comutativ | 2p 3p |
| | b) $g(e) = e \Rightarrow e \in M$, deci M este nevidă Pentru orice $x, y \in M$, $g(x \circ y) = g(x) \circ g(y) = e \circ e = e$, deci $x \circ y \in M$ Cum, pentru orice $x \in M$, $g(x^{-1}) = (g(x))^{-1} = e^{-1} = e$, obținem că $x^{-1} \in M$, deci M este subgrup al grupului (G, \circ) | 1p 2p 2p |
| | c) Pentru $x \in H$ și $a \in G \setminus H$, dacă $x \circ a = y \in H$, obținem $a = x^{-1} \circ y \in H$, ceea ce este fals, deci $x \circ a \in G \setminus H$, pentru orice $x \in H$ și $a \in G \setminus H$ $f(x \circ a) = g(x \circ a) \Rightarrow f(x) \circ f(a) = g(x) \circ g(a)$ și, cum $f(a) = g(a)$, obținem $f(x) = g(x)$, pentru orice $x \in H$ | 2p 3p |
| 2. | a) $f'(x) = x' \cdot \arctg(x^2 + 1) + x \cdot \frac{(x^2 + 1)'}{1 + (x^2 + 1)^2} =$ $= \arctg(x^2 + 1) + x \cdot \frac{2x}{1 + (x^2 + 1)^2} = \arctg(x^2 + 1) + \frac{2x^2}{1 + (x^2 + 1)^2}$, $x \in \mathbb{R}$ | 2p 3p |
| | b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctg(x^2 + 1) = \frac{\pi}{2}$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) - \frac{\pi}{2}x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctg(x^2 + 1) - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^3}{1 + (x^2 + 1)^2} = 0$, deci dreapta de ecuație $y = \frac{\pi}{2}x$ este asimptota oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f | 2p 3p |
| | c) Dacă $J_n = (n+1) \int_0^1 x^n f(x) dx$, atunci $J_n = \int_0^1 (x^{n+1})' f(x) dx = f(1) - \int_0^1 x^{n+1} f'(x) dx$ f' este continuă pe $[0,1] \Rightarrow f'$ este mărginită pe $[0,1]$, deci există $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $a \leq f'(x) \leq b$, pentru orice $x \in [0,1]$, de unde obținem $\frac{a}{n+2} \leq \int_0^1 x^{n+1} f'(x) dx \leq \frac{b}{n+2}$, deci $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = f(1) = \arctg 2 \neq 0$ Cum $I_n = \frac{n^\alpha}{n+1} J_n$, obținem că limita șirului $(I_n)_{n \geq 1}$ este un număr real nenul $\Leftrightarrow \alpha = 1$ | 2p 2p 1p |

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

| | |
|---|----|
| <i>Itemul de tip alegere multiplă elaborat:</i> | |
| - menționarea competenței/competențelor evaluate | 1p |
| - respectarea formatului itemului | 1p |
| - elaborarea detaliată și corectitudinea răspunsului așteptat (baremul de evaluare) | 2p |
| - corectitudinea științifică a informației de specialitate | 1p |

| | |
|--|---|
| <p><i>Itemul de tip pereche</i> elaborat:</p> <ul style="list-style-type: none"> - menționarea competenței/competențelor evaluate - respectarea formatului itemului - elaborarea detaliată și corectitudinea răspunsului așteptat (baremul de evaluare) - corectitudinea științifică a informației de specialitate | <p>1p</p> <p>1p</p> <p>2p</p> <p>1p</p> |
| <p><i>Itemul cu răspuns scurt</i> elaborat:</p> <ul style="list-style-type: none"> - menționarea competenței/competențelor evaluate - respectarea formatului itemului - elaborarea detaliată și corectitudinea răspunsului așteptat (baremul de evaluare) - corectitudinea științifică a informației de specialitate | <p>1p</p> <p>1p</p> <p>2p</p> <p>1p</p> |
| <p><i>Itemul de completare</i> elaborat:</p> <ul style="list-style-type: none"> - menționarea competenței/competențelor evaluate - respectarea formatului itemului - elaborarea detaliată și corectitudinea răspunsului așteptat (baremul de evaluare) - corectitudinea științifică a informației de specialitate | <p>1p</p> <p>1p</p> <p>2p</p> <p>1p</p> |
| <p><i>Itemul de tip întrebare structurată</i> elaborat:</p> <ul style="list-style-type: none"> - menționarea competenței/competențelor evaluate - respectarea formatului itemului - elaborarea detaliată și corectitudinea răspunsului așteptat (baremul de evaluare) - corectitudinea științifică a informației de specialitate | <p>1p</p> <p>1p</p> <p>2p</p> <p>1p</p> |
| <p><i>Itemul de tip rezolvare de probleme</i> elaborat:</p> <ul style="list-style-type: none"> - menționarea competenței/competențelor evaluate - respectarea formatului itemului - elaborarea detaliată și corectitudinea răspunsului așteptat (baremul de evaluare) - corectitudinea științifică a informației de specialitate | <p>1p</p> <p>1p</p> <p>2p</p> <p>1p</p> |