

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Test 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Se consideră numerele complexe $z_1 = 3 - 3i$ și $z_2 = 5 - 6i$. Arătați că $2z_1 - z_2 = 1$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 15$. Determinați numărul real m pentru care $f(m) + f(m+1) = 35$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2 \cdot 3^x - 3^{x+1} + 27 = 0$.
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să fie multiplu de 25.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(6,4)$, $B(-2,6)$. Determinați numerele reale a și b , știind că, dacă $C(a,b)$, atunci $\overline{AC} = \overline{CB}$.
- 5p** 6. Se consideră triunghiul ABC , dreptunghic în A , cu $AB = 4$. Știind că aria $\triangle ABC$ este egală cu 6, calculați lungimea laturii BC .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & a+1 & a \\ a & 6 & 4 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} 2x + 2y + z = 3 \\ 2x + (a+1)y + az = 3 \\ ax + 6y + 4z = a + 3 \end{cases}$, unde a este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(a)) = (a-1)(a-4)$, pentru orice număr real a .
- 5p** b) Arătați că **nu** există niciun număr real a pentru care $(A(4) - A(1)) \cdot A(a) = A(a) \cdot (A(4) - A(1))$.
- 5p** c) Determinați numerele întregi a , pentru care sistemul de ecuații are soluția unică (x_0, y_0, z_0) cu x_0 , y_0 și z_0 numere întregi.
2. Pe mulțimea $M = (-10, 10)$ se definește legea de compoziție asociativă $x * y = \frac{100(x+y)}{xy+100}$.
- 5p** a) Arătați că $3 * 0 = 3$.
- 5p** b) Se consideră $f: M \rightarrow (0, +\infty)$, $f(x) = \frac{10-x}{10+x}$. Demonstrați că $f(x * y) = f(x)f(y)$, pentru orice $x, y \in M$.
- 5p** c) Determinați $x \in M$ pentru care $\underbrace{x * x * \dots * x}_{\text{de } 11 \text{ ori } x} = 0$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x(x^2 - 4x + 1)$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = e^x(x-3)(x+1)$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Determinați abscisele punctelor situate pe graficul funcției f , în care tangenta la graficul funcției f este paralelă cu dreapta de ecuație $y = 2020$.
- 5p** c) Determinați valorile reale ale lui a , știind că graficul funcției f intersectează dreapta de ecuație $y = a$ în exact trei puncte.

2. Se consideră funcția $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x + \frac{1}{\ln x}$.

5p a) Arătați că orice primitivă a funcției f este strict crescătoare pe intervalul $(1, +\infty)$.

5p b) Calculați $\int_e^{e^2} \frac{1}{x} (f(x) - \ln x) dx$.

5p c) Determinați numărul real a , $a > e$, știind că $\int_e^a \ln x dx = 2a$.