*luni, 21. septembrie 2020*

**Problema 1.** Fie $ABCD$ un patrulater convex. Punctul $P$ este în interiorul lui $ABCD$. Următoarele egalități de rapoarte sunt satisfăcute:

$$\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1 : 2 : 3 = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC.$$

Demonstrați că următoarele trei drepte sunt concurente: bisectoarele interioare ale unghiurilor $\angle ADP$ și $\angle PCB$ și mediatoarea segmentului $AB$.

**Problema 2.** Fie numerele reale $a, b, c, d$ astfel încât $a \geq b \geq c \geq d > 0$ și $a + b + c + d = 1$. Demonstrați că

$$(a + 2b + 3c + 4d)\, a^a\, b^b\, c^c\, d^d < 1.$$

**Problema 3.** Se dau $4n$ pietricele de greutăți $1, 2, 3, \ldots, 4n$. Fiecare pietricică este colorată cu una din $n$ culori și sunt patru pietricele de fiecare culoare. Demonstrați că putem să punem pietricelele în două grămezi astfel încât următoarele două condiții sunt satisfăcute:

- Greutățile totale ale celor două grămezi sunt egale.
- Fiecare grămadă conține două pietricele de fiecare culoare.



*Timp de lucru: 4 ore și 30 de minute.*
*Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.*

*marți, 22. septembrie 2020*

**Problema 4.** Fie $n > 1$ un număr natural. Pe panta unui munte se află $n^2$ stații, fiecare la altitudini diferite. Două companii $A$ și $B$ operează fiecare câte $k$ telecabine; fiecare telecabină asigură un transfer de la o stație la o altă stație aflată la o altitudine mai mare (fară opriri intermediare). Cele $k$ telecabine ale lui $A$ au $k$ puncte de pornire diferite și $k$ puncte de sosire diferite, și o telecabină care pornește de la o altitudine mai mare va ajunge de asemenea la o altitudine mai mare. Aceleași condiții sunt îndeplinite și pentru $B$. Spunem că două stații sunt *unite* de o companie dacă, pornind de la stația aflată la o altitudine mai mică, putem ajunge la stația aflată la o altitudine mai mare folosind una sau mai multe telecabine ale acelei companii (nu sunt permise alte deplasări între stații).

Determinați cel mai mic număr natural nenul $k$ pentru care există cu siguranță două stații care sunt unite de ambele companii.

**Problema 5.** Se consideră un pachet de $n > 1$ cărți. Pe fiecare carte este scris un număr natural nenul. Pachetul are proprietatea că media aritmetică a numerelor de pe fiecare pereche de cărți este egală cu media geometrică a numerelor de pe o colecție formată din una sau mai multe cărți.

Pentru ce valori ale lui $n$ rezultă că numerele de pe cărți sunt toate egale?

**Problema 6.** Demonstrați că există o constantă strict pozitivă $c$ astfel încât următoarea afirmație este adevărată:

Se consideră un număr natural $n > 1$ și o mulțime $\mathcal{S}$ de $n$ puncte din plan astfel încât distanța între oricare două puncte diferite din $\mathcal{S}$ este cel puțin 1. Atunci rezultă că există o dreaptă $\ell$ care separă $\mathcal{S}$ astfel încât distanța de la orice punct din $\mathcal{S}$ la dreapta $\ell$ este cel puțin $cn^{-1/3}$.

(O dreaptă $\ell$ *separă* o mulțime de puncte $\mathcal{S}$ dacă există un segment care unește două puncte din $\mathcal{S}$ și intersectează dreapta $\ell$.)

*Notă.* Rezultate mai slabe în care $cn^{-1/3}$ este înlocuit de $cn^{-\alpha}$ pot primi puncte în funcție de valoarea constantei $\alpha > 1/3$.



*Timp de lucru: 4 ore și 30 de minute.*
*Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.*