

**CONCURSUL NAȚIONAL DE OCUPARE A POSTURILOR DIDACTICE/CATEDRELOR  
VACANTE/REZERVATE ÎN ÎNVĂȚĂMÂNTUL PREUNIVERSITAR**

**21 iulie 2021**

**Probă scrisă  
MATEMATICĂ**

**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

**Model**

- Se punctează orice modalitate de rezolvare corectă a cerințelor, în limita punctajului maxim corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

1.	a) $f(x) = x^2 + 2x + 6$ , deci $f(n) = 9 \Leftrightarrow n^2 + 2n - 3 = 0$ Cum $n$ este număr natural, obținem $n = 1$	3p 2p
	b) $f(x) = 4x + 5 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2k - 5 = 0$ Dreapta de ecuație $y = 4x + 5$ intersectează graficul funcției $f$ în exact un punct dacă și numai dacă ecuația $x^2 - 2x + 2k - 5 = 0$ are exact o soluție număr real, deci $4 - 4(2k - 5) = 0$ , de unde obținem $k = 3$ , care convine	2p 3p
	c) De exemplu, $f(k - 2) = (k - 2)^2 + 2(k - 2) + 2k = k^2 - 4k + 4 + 2k - 4 + 2k = k^2$ Deoarece $k - 2$ este număr natural, mulțimea numerelor naturale $n$ pentru care numărul $f(n)$ este pătratul unui număr natural este nevidă	3p 2p
2.	a) $\Delta ABC$ este dreptunghic în $A$ și $AD \perp BC$ , $D \in BC$ , deci $AD^2 = BD \cdot DC$ Cum punctul $M$ este mijlocul segmentului $AD$ , obținem $AD = 2MD$ , deci $4MD^2 = BD \cdot DC$	3p 2p
	b) Punctul $B'$ este simetricul punctului $B$ față de dreapta $CM \Rightarrow$ semidreapta $CM$ este bisectoarea unghiului $BCB'$ , deci semidreapta $CM$ este bisectoarea unghiului $BCE$ Punctul $C'$ este simetricul punctului $C$ față de dreapta $BM \Rightarrow$ semidreapta $BM$ este bisectoarea unghiului $CBC'$ , deci semidreapta $BM$ este bisectoarea unghiului $CBE$ și, cum $BM \cap CM = \{M\}$ , obținem că punctul $M$ este centrul cercului înscris în triunghiul $BCE$	2p 3p
	c) $MD = r$ , unde $r$ este raza cercului înscris în $\Delta BCE$ , deci $4r^2 = BD \cdot DC$ $BE = x$ , $CE = y$ , $BC = a$ și $p = \frac{1}{2}(x + y + a)$ , deci $\mathcal{A}_{\Delta BCE} = pr = \sqrt{p(p - a)(p - x)(p - y)}$ , de unde obținem $pr^2 = (p - a)(p - x)(p - y)$ $BD = p - y$ și $DC = p - x$ , deci $p = 4(p - a) \Rightarrow 3p = 4a \Rightarrow x + y + a = \frac{8a}{3}$ , de unde obținem $BE + CE = \frac{5}{3}BC$	1p 2p 2p

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1.	a) $g = X^4 - 13X^2 + 36 = (X^2 - 4)(X^2 - 9) =$ $= (X - 2)(X + 2)(X - 3)(X + 3)$ , deci rădăcinile polinomului $g$ sunt $x_1 = -3$ , $x_2 = -2$ , $x_3 = 2$ și $x_4 = 3$	2p 3p
----	---	----------

	<p><b>b)</b> <math>f(x) = (x-3)(x-2)(x+2)(x+3) - 1</math> Cum <math>x \geq 4</math>, obținem <math>x-3 \geq 1</math>, <math>x-2 \geq 2</math>, <math>x+2 \geq 6</math> și <math>x+3 \geq 7 \Rightarrow f(x) \geq 1 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 7 - 1</math>, deci <math>f(x) \geq 83</math>, pentru orice <math>x \in [4, +\infty)</math></p>	<p><b>2p</b></p> <p><b>3p</b></p>
	<p><b>c)</b> Dacă <math>f = h_1 h_2</math>, unde <math>h_1, h_2 \in \mathbb{Z}[X]</math>, de grad cel puțin 1, atunci <math>h_1(a)h_2(a) = f(a) = -1</math>, pentru orice <math>a \in \{-3, -2, 2, 3\}</math> și, cum <math>h_1(a), h_2(a) \in \mathbb{Z}</math>, obținem că <math>h_1(a) = -h_2(a) \in \{-1, 1\}</math>, deci <math>h_1(a) + h_2(a) = 0</math>, pentru orice <math>a \in \{-3, -2, 2, 3\}</math> Polinomul <math>h = h_1 + h_2</math> are gradul cel mult 3 și <math>h(a) = 0</math>, pentru orice <math>a \in \{-3, -2, 2, 3\}</math>, deci <math>h = 0</math>, de unde obținem <math>h_1 = -h_2</math>, deci <math>f = -h_1^2</math>, ceea ce este imposibil, deoarece <math>h_1</math> are coeficienți reali și <math>f(4) &gt; 0</math></p>	<p><b>2p</b></p> <p><b>3p</b></p>
<b>2.</b>	<p><b>a)</b> <math>f'(x) = \frac{(e^x + 1)x - (e^x + x + 1)}{x^2} = \frac{xe^x - e^x - 1}{x^2}</math>, <math>x \in (0, +\infty)</math></p> <p><math>\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x &gt; 0}} \frac{xe^x - e^x - 1}{x^2} = -\infty</math></p>	<p><b>3p</b></p> <p><b>2p</b></p>
	<p><b>b)</b> <math>f'(x) = \frac{e^x(x-1) - 1}{x^2} &lt; 0</math>, pentru orice <math>x \in (0, 1]</math> <math>f</math> este strict descrescătoare pe <math>(0, 1]</math>, de unde obținem că <math>f(x) &gt; f(1) = e + 2</math>, pentru orice <math>x \in (0, 1)</math></p>	<p><b>2p</b></p> <p><b>3p</b></p>
	<p><b>c)</b> <math>\int_1^2 \frac{1}{f(x)} dx = \int_1^2 \frac{x}{e^x + x + 1} dx = \int_1^2 \frac{x + e^x + 1 - (e^x + 1)}{e^x + x + 1} dx = \int_1^2 \left( 1 - \frac{(e^x + x + 1)'}{e^x + x + 1} \right) dx =</math> <math>= \left( x - \ln(e^x + x + 1) \right) \Big _1^2 = 1 - \ln \frac{e^2 + 3}{e + 2} = \ln \frac{e^2 + 2e}{e^2 + 3}</math></p>	<p><b>3p</b></p> <p><b>2p</b></p>

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

<p><i>Itemul de completare elaborat:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- menționarea competenței specifice evaluate</li> <li>- menționarea activității de învățare selectate</li> <li>- respectarea formatului itemului</li> <li>- elaborarea răspunsului așteptat (baremul de evaluare)</li> <li>- corectitudinea științifică a informației de specialitate</li> </ul>	<p><b>1p</b></p> <p><b>1p</b></p> <p><b>1p</b></p> <p><b>1p</b></p> <p><b>1p</b></p>
<p><i>Itemul cu răspuns scurt elaborat:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- menționarea competenței specifice evaluate</li> <li>- menționarea activității de învățare selectate</li> <li>- respectarea formatului itemului</li> <li>- elaborarea răspunsului așteptat (baremul de evaluare)</li> <li>- corectitudinea științifică a informației de specialitate</li> </ul>	<p><b>1p</b></p> <p><b>1p</b></p> <p><b>1p</b></p> <p><b>1p</b></p> <p><b>1p</b></p>
<p><i>Itemul de tip pereche elaborat:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- menționarea competenței specifice evaluate</li> <li>- menționarea activității de învățare selectate</li> <li>- respectarea formatului itemului</li> <li>- elaborarea răspunsului așteptat (baremul de evaluare)</li> <li>- corectitudinea științifică a informației de specialitate</li> </ul>	<p><b>1p</b></p> <p><b>1p</b></p> <p><b>1p</b></p> <p><b>1p</b></p> <p><b>1p</b></p>

<i>Itemul de tip alegere multiplă</i> elaborat: <ul style="list-style-type: none"><li>- menționarea competenței specifice evaluate</li><li>- menționarea activității de învățare selectate</li><li>- respectarea formatului itemului</li><li>- elaborarea răspunsului așteptat (baremul de evaluare)</li><li>- corectitudinea științifică a informației de specialitate</li></ul>	<b>1p</b> <b>1p</b> <b>1p</b> <b>1p</b> <b>1p</b>
<i>Itemul de tip întrebare structurată</i> elaborat: <ul style="list-style-type: none"><li>- menționarea competenței specifice evaluate</li><li>- menționarea activității de învățare selectate</li><li>- respectarea formatului itemului</li><li>- elaborarea detaliată și corectitudinea răspunsului așteptat (baremul de evaluare)</li><li>- corectitudinea științifică a informației de specialitate</li></ul>	<b>1p</b> <b>1p</b> <b>1p</b> <b>1p</b> <b>1p</b>
<i>Itemul de tip rezolvare de probleme</i> elaborat: <ul style="list-style-type: none"><li>- menționarea competenței specifice evaluate</li><li>- menționarea activității de învățare selectate</li><li>- respectarea formatului itemului</li><li>- elaborarea detaliată și corectitudinea răspunsului așteptat (baremul de evaluare)</li><li>- corectitudinea științifică a informației de specialitate</li></ul>	<b>1p</b> <b>1p</b> <b>1p</b> <b>1p</b> <b>1p</b>