marți, 20. iulie 2021

Problema 4. Fie Γ un cerc cu centrul în I și $ABCD$ un patrulater convex astfel încât fiecare dintre segmentele AB, BC, CD și DA este tangent la Γ. Fie Ω cercul circumscris triunghiului AIC. Prelungirea lui BA dincolo de A intersectează pe Ω în X, și prelungirea lui BC dincolo de C intersectează pe Ω în Z. Prelungirile lui AD și CD dincolo de D intersectează pe Ω în Y și respectiv T. Demonstrați că

$$AD + DT + TX + XA = CD + DY + YZ + ZC.$$

Problema 5. Două veverițe, Bushy și Jumpy, au adunat pentru iarnă 2021 de nuci. Jumpy numerotează nucile de la 1 la 2021, și sapă 2021 de gropi aranjate în formă circulară în jurul copacului lor favorit. În dimineața următoare Jumpy observă că Bushy a pus câte o nucă în fiecare groapă, fără să țină cont de numerotare. Nemulțumită, Jumpy decide să reordoneze nucile efectuând o secvență de 2021 de mutări. La mutarea k Jumpy schimbă între ele pozițiile celor două nuci alăturate nucii k. Demonstrați că există o valoare a lui k astfel încât, la mutarea k, Jumpy schimbă nucile a și b astfel încât $a < k < b$.

Problema 6. Fie $m \geqslant 2$ un număr natural, fie A o mulțime finită de numere întregi (nu neapărat pozitive), și fie $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_m$ submulțimi ale lui A. Presupunem că pentru fiecare $k = 1, 2, \ldots, m$ suma elementelor mulțimii B_k este m^k. Demonstrați că A conține cel puțin $m/2$ elemente.