



luni, 19. iulie 2021

Problema 1. Fie $n \geq 100$ un număr natural. Ivan scrie fiecare dintre numerele $n, n + 1, \dots, 2n$ pe câte un cartonaș diferit. Apoi el amestecă cele $n + 1$ cartonașe și le împarte în două teancuri. Demonstrați că cel puțin unul dintre teancuri conține două cartonașe astfel încât suma numerelor de pe ele este un pătrat perfect.

Problema 2. Demonstrați că inegalitatea

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{|x_i - x_j|} \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{|x_i + x_j|}$$

este adevărată pentru orice numere reale x_1, \dots, x_n .

Problema 3. Fie D un punct în interiorul triunghiului ascuțitunghic ABC cu $AB > AC$, astfel încât $\angle DAB = \angle CAD$. Punctul E de pe segmentul AC satisface $\angle ADE = \angle BCD$, punctul F de pe segmentul AB satisface $\angle FDA = \angle DBC$, și punctul X de pe dreapta AC satisface $CX = BX$. Fie O_1 și O_2 centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor ADC și respectiv EXD . Demonstrați că dreptele BC , EF și O_1O_2 sunt concurente.