MINISTERUL EDUCAȚIEI

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Slobozia/Ialomița, 10-13 aprilie 2023

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Slobozia, 11 aprilie 2023

CLASA a VI-a – soluții și bareme

Problema 1. Determinați toate șirurile de rapoarte egale de forma

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{a_3}{a_4}=\frac{a_5}{a_6}=\frac{a_7}{a_8}$$

care îndeplinesc simultan condițiile:
- mulțimea $\{a_1, a_2, \ldots, a_8\}$ este mulțimea divizorilor pozitivi ai lui 24;
- valoarea comună a rapoartelor este număr natural.

Soluție. Deoarece $24 = 2^3 \cdot 3$, valoarea comună r a rapoartelor poate fi doar un divizor al lui 24, diferit de 1 . . . . **2p**

Pentru $r = 2$ avem $2 = \frac{24}{12} = \frac{8}{4} = \frac{6}{3} = \frac{2}{1}$ **1p**

Pentru $r = 3$ avem $3 = \frac{24}{8} = \frac{12}{4} = \frac{6}{2} = \frac{3}{1}$ **1p**

Pentru $r = 4$ avem $4 = \frac{24}{6} = \frac{12}{3} = \frac{8}{2} = \frac{4}{1}$ **1p**

Pentru $r = 2$, $r = 3$ sau $r = 4$ nu putem avea și alte șiruri, deoarece, dacă ordonăm descrescător divizorii și îi folosim pe rând, trebuie să punem la numărător cel mai mare divizor d neutilizat până atunci, iar la numitor $\frac{d}{r}$, obținând șirurile de mai sus **1p**

Pentru $r \geq 8$, respectiv $r = 6$, nu avem niciun șir, deoarece niciuna dintre egalitățile $\frac{d}{6} = r$ și $\frac{6}{d} = r$, respectiv $\frac{d}{3} = 6$ și $\frac{3}{d} = 6$, nu poate fi îndeplinită **1p**

Astfel, șirurile cerute sunt cele trei de mai sus.

Problema 2. Determinați tripletele (a, b, c) de numere întregi, care verifică simultan relațiile $a^2 + a = b + c$, $b^2 + b = a + c$ și $c^2 + c = a + b$.

Soluție. Prin adunarea relațiilor obținem $a^2 + b^2 + c^2 = a + b + c$ $(^*)$ **2p**

Observăm că, dacă x este număr întreg, atunci $x^2 \geq x$, cu egalitate doar pentru $x = 0$ și $x = 1$ **1p**

Justificarea observației precedente este că dacă $x \leq 0$, atunci $x^2 \geq 0 \geq x$, iar dacă $x \geq 1$, atunci $x^2 = x \cdot x \geq x \cdot 1 = x$ **1p**

Astfel, egalitatea $(^*)$ este posibilă doar dacă $a^2 = a$, $b^2 = b$ și $c^2 = c$ **1p**

Din $a^2 = a$ reiese $a = 0$ sau $a = 1$. Pentru $a = 0$ obținem $b = c = 0$, iar pentru $a = 1$ obținem $b = c = 1$, deci tripletele cerute sunt $(0, 0, 0)$ și $(1, 1, 1)$ **2p**

Problema 3. Determinați numerele naturale nenule n pentru care numărul

$$N = \frac{1}{n \cdot (n+1)}$$

se reprezintă printr-o fracție zecimală finită.

Soluție. Știm că numărul N se reprezintă printr-o fracție zecimală finită dacă și numai dacă descompunerea numitorului în factori primi este de forma $2^a \cdot 5^b$, cu $a, b \in \mathbb{N}$ ... **1p**

Deoarece n și $n+1$ sunt prime între ele, sunt posibile cazurile: I) $n = 1$, $n+1 = 2^a \cdot 5^b$; II) $n = 5^b$, $n+1 = 2^a$; III) $n = 2^a$, $n+1 = 5^b$ ... **1p**

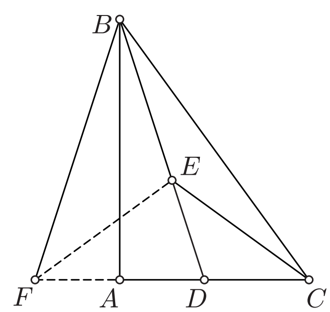
II) În acest caz $2^a = 5^b + 1 = \mathcal{M}_4 + 2$, deci $a = 1$, $b = 0$, $n = 1$ ... **2p**

III) Obținem $2^a = 5^b - 1$ (*). Deoarece 5^b și 2^a nu sunt divizibile cu 3, egalitatea (*) este posibilă doar dacă $2^a = \mathcal{M}_3 + 1$ și $5^b = \mathcal{M}_3 + 2$. Deoarece $5^{2k} = \mathcal{M}_3 + 1$ pentru $k \in \mathbb{N}$, rezultă că $b = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$. În acest caz, pentru $k \geq 1$ avem $5^b - 1 = 5 \cdot 25^k - 1 = \mathcal{M}_8 + 4$ și $5^b - 1 > 8$. Astfel, egalitatea (*) nu este posibilă pentru $b \geq 2$. Rămâne $b = 1$ și $a = 2$, care dă $n = 4$ ... **2p**

Numerele cerute sunt $n = 1$ și $n = 4$ ... **1p**

Observație. Enunțarea și/sau folosirea proprietății ,,*dacă $x^p - y^q = 1$, x, y, p, q sunt numere naturale și $p, q \geq 2$, atunci $x = 3$, $y = 2$, $p = 2$ și $q = 3$*" nu primesc niciun punct fără demonstrarea acestei afirmații.

Problema 4. Fie triunghiul ABC cu $\sphericalangle BAC = 90^\circ$ și $\sphericalangle ACB = 54^\circ$. Construim bisectoarea BD ($D \in AC$) a unghiului ABC și considerăm punctul E pe segmentul BD astfel încât $DE = DC$. Arătați că $BE = 2 \cdot AD$.



Soluție. Calculând măsuri de unghiuri obținem $\sphericalangle ABC = 90^\circ - 54^\circ = 36^\circ$, apoi $\sphericalangle ABD = \sphericalangle CBD = \frac{1}{2}\sphericalangle ABC = 18^\circ$. Rezultă $\sphericalangle BDA = 90^\circ - \sphericalangle ABD = 72^\circ$, $\sphericalangle BDC = 180^\circ - \sphericalangle BDA = 108^\circ$ ... **1p**

În triunghiul isoscel CDE obținem $\sphericalangle DCE = \sphericalangle DEC = \frac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle CDE) = 36^\circ$, de unde $\sphericalangle BCE = \sphericalangle BCD - \sphericalangle ECD = 18^\circ = \sphericalangle CBE$, deci triunghiul BCE este isoscel ... **2p**

Fie F simetricul lui D față de A. Atunci D, A, F sunt coliniare și $\sphericalangle ABF = \sphericalangle ABD = 18^\circ$ (deoarece $\triangle BAF \equiv \triangle BAD$ – caz CC), de unde $\sphericalangle FBC = 54^\circ = \sphericalangle FCB$, deci triunghiul BFC este isoscel, cu $FB = FC$ ... **2p**

Rezultă $\triangle FEB \equiv \triangle FEC$ (L.L.L.), deci $\sphericalangle EFB = \sphericalangle EFC = \frac{1}{2}\sphericalangle CFB = 36^\circ$. Astfel triunghiul EFC este isoscel, de unde $EF = EC = EB$ (*). De asemenea, $\sphericalangle FED = 180^\circ - \sphericalangle FDE - \sphericalangle FED = 180^\circ - 72^\circ - 36^\circ = 72^\circ = \sphericalangle FDE$, ceea ce arată că $FE = FD = 2 \cdot AD$. Folosind (*) obținem $EB = 2 \cdot AD$ ... **2p**