Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Brașov, 11 aprilie 2023

CLASA a VIII-a – soluții și bareme

Problema 1. Se consideră numerele reale pozitive a, b, c, astfel încât $a+b+c=3$.
Demonstrați că $a^2+b^2+c^2+a^2b+b^2c+c^2a \geqslant 6$.

Soluția 1. Adunând $2ab+2bc+2ca$ în ambii membri, inegalitatea din enunț este echivalentă cu $(a+b+c)^2+a^2b+b^2c+c^2a \geqslant 6+2ab+2bc+2ca$, deci problema revine la a demonstra că $a^2b+b^2c+c^2a+3 \geqslant 2ab+2bc+2ca$ **2p**

Deoarece $a+b+c=3$, inegalitatea precedentă este echivalentă cu:
$\left(b+a^2b\right)+\left(c+b^2c\right)+\left(a+c^2a\right) \geqslant 2ab+2bc+2ca.$ (1) **1p**

Folosind eventual inegalitatea mediilor, obținem $b+a^2b \geqslant 2ab$, $c+b^2c \geqslant 2bc$ și $a+c^2a \geqslant 2ca$.

Adunând membru cu membru inegalitățile precedente, deducem că (1) este adevărată, așadar are loc inegalitatea din enunț. **4p**

Soluția 2. Adunând $a+b+c$ în ambii membri, inegalitatea de demonstrat este echivalentă cu: $a^2+b^2+c^2+a^2b+b^2c+c^2a+a+b+c \geqslant 9$. **2p**

Folosind eventual inegalitatea mediilor, obținem inegalitățile: $b+a^2b \geqslant 2ab$, $c+b^2c \geqslant 2bc$ și $a+c^2a \geqslant 2ca$. **4p**

Deducem că $a^2+b^2+c^2+a^2b+b^2c+c^2a+a+b+c \geqslant a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2=9$, adică ceea ce trebuia demonstrat **1p**

Problema 2. Demonstrați că:

a) există o infinitate de perechi (x, y) de numere reale din intervalul $\left[0, \sqrt{3}\,\right]$ care verifică egalitatea $x \cdot \sqrt{3-y^2}+y \cdot \sqrt{3-x^2}=3$;

b) **nu** există nicio pereche (x, y) de numere raționale din intervalul $\left[0, \sqrt{3}\,\right]$, astfel încât să aibă loc egalitatea $x \cdot \sqrt{3-y^2}+y \cdot \sqrt{3-x^2}=3$.

Soluție. a) Orice pereche $\left(a, \sqrt{3-a^2}\right)$, cu $a \in[0,1]$, este soluție. **2p**

b) Ridicând la puterea a doua egalitatea $y \cdot \sqrt{3-x^2}=3-x \cdot \sqrt{3-y^2}$, deducem că $\left(\sqrt{3-y^2}-x\right)^2=0$, deci $x^2+y^2=3$. (1) **1p**

Presupunem că există $x, y \in \mathbb{Q}_{+} \cap\left[0, \sqrt{3}\right]$ care verifică egalitatea (1). Este evident că x și y nu pot fi egale cu 0. Fie $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $(a, b)=(c, d)=1$, iar $x=\dfrac{a}{b}$ și $y=\dfrac{c}{d}$.

Din (1) obținem $a^2d^2+b^2c^2=3b^2d^2$ (2).

Cum $(c, d)=1$ și $d^2 \mid b^2c^2$, deducem că $d^2 \mid b^2$. Din $(a, b)=1$ și $b^2 \mid a^2d^2$, rezultă $b^2 \mid d^2$. Așadar $b^2=d^2$. Relația (2) devine $a^2+c^2=3b^2$. **2p**

Dacă a și c nu sunt multipli de 3, atunci $a^2+c^2=M_3+1$ sau $a^2+c^2=M_3+2$, contradicție cu $a^2+c^2=3b^2$. Așadar, $3 \mid a$ și $3 \mid c$, de unde $3b^2=M_9$, adică $3 \mid b$, deci $(a, b) \geqslant 3$, fals.

În consecință, ecuația nu are soluții $x, y \in \mathbb{Q}_{+} \cap\left[0, \sqrt{3}\right]$. **2p**

Problema 3. Spunem că un număr natural n este *interesant* dacă poate fi scris sub forma $n = \left[\frac{1}{a}\right] + \left[\frac{1}{b}\right] + \left[\frac{1}{c}\right]$, unde a, b și c sunt numere reale pozitive astfel încât $a+b+c=1$.

Determinați toate numerele interesante. ($[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x.)

Soluție. Fără să restrângem generalitatea, alegem $a \leqslant b \leqslant c$.

Cum a, b și c sunt numere reale pozitive cu suma egală cu 1, rezultă că $a, b, c \in (0,1)$, prin urmare $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c} \in (1, \infty)$. Deducem că $\left[\frac{1}{a}\right], \left[\frac{1}{b}\right], \left[\frac{1}{c}\right] \in \mathbb{N}^*$, deci $n \geqslant 3$. **1p**

Dacă $\left[\frac{1}{a}\right] \leqslant 2$, atunci $a, b, c \in \left(\frac{1}{3}, 1\right)$, iar $a+b+c>1$, fals. Așadar $\left[\frac{1}{a}\right] \geqslant 3$, deci $n \geqslant 5$.

Dacă 5 ar fi interesant, am avea $\left[\frac{1}{a}\right] = 3$ și $\left[\frac{1}{b}\right] = \left[\frac{1}{c}\right] = 1$, deci $a+b+c > b+c > 1$, fals.

Dacă 6 ar fi interesant, atunci $\left[\frac{1}{a}\right] = 3$, $\left[\frac{1}{b}\right] = 2$, $\left[\frac{1}{c}\right] = 1$. Rezultă $a \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right]$, $b \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$ și $c \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, deci $a+b+c > \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{13}{12}$, fals. **3p**

Demonstrăm că toate numerele naturale $n \geqslant 7$ sunt interesante.

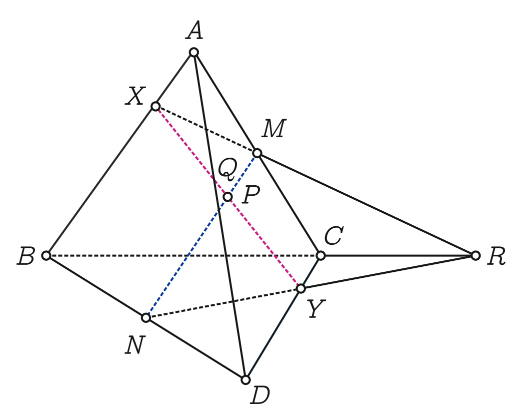
Fie $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 4$ și numerele reale $a = \frac{1}{k}, b = c = \frac{k-1}{2k}$, cu $a+b+c=1$.

Atunci, $\left[\frac{1}{a}\right] = k$, $\left[\frac{1}{b}\right] = \left[\frac{1}{c}\right] = \left[2 + \frac{2}{k-1}\right] = 2$, prin urmare $\left[\frac{1}{a}\right] + \left[\frac{1}{b}\right] + \left[\frac{1}{c}\right] = k+4$. Rezultă că toate numerele naturale $n \geq 8$ sunt interesante.

Alegând, de exemplu, $a = \frac{8}{30}, b = c = \frac{11}{30}$, avem $\left[\frac{1}{a}\right] + \left[\frac{1}{b}\right] + \left[\frac{1}{c}\right] = 3+2+2 = 7$ și $a+b+c=1$, așadar și numărul 7 este interesant....................................... **3p**

Problema 4. Fie $ABCD$ un tetraedru și mijloacele M, N ale muchiilor AC, respectiv BD. Arătați că pentru orice punct P de pe segmentul MN, cu $P \neq M$ și $P \neq N$, există și sunt unice punctele X și Y pe segmentele AB, respectiv CD, astfel încât X, P și Y sunt coliniare.

Soluție. Deoarece $P \neq M$, $P \neq N$, dacă X, Y, P sunt coliniare, avem $X \notin \{A, B\}$ și $Y \notin \{C, D\}$. Într-adevăr, dacă $X = A$, atunci $XY \subset (ACD)$, deci $P \in (ACD)$, fals. Celelalte situații sunt analoage.



Determinăm $X \in (AB)$ și $Y \in (CD)$ cu proprietatea cerută. Observăm că:

$$(XY) \cap (MN) \neq \varnothing \Leftrightarrow X, Y, M, N \text{ coplanare } \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{XA}{XB} \cdot \frac{NB}{ND} \cdot \frac{YD}{YC} \cdot \frac{MC}{MA} = 1.$$

Deoarece M și N sunt mijloacele muchiilor AC, respectiv AB, obținem:

$$(XY) \cap (MN) \neq \varnothing \Leftrightarrow \frac{XA}{XB} = \frac{YC}{YD}. \quad (1)$$ **2p**

Arătăm că, dacă există punctele $X \in (AB)$ și $Y \in (CD)$, astfel încât X, P și Y sunt coliniare, atunci acestea sunt unice. Presupunem că există $X_1 \in (AB)$ și $Y_1 \in (CD)$, cu $X_1 \neq X$, astfel încât X_1, P și Y_1 sunt coliniare. Din (1), scriind proporții derivate, obținem $\dfrac{XA}{YC} = \dfrac{X_1A}{Y_1C} = \dfrac{AB}{CD}$. Deoarece $X_1 \neq X$, rezultă că $X_1A \neq XA$, deci $Y_1C \neq YC$, adică $Y_1 \neq Y$. Dreptele X_1Y_1 și XY sunt concurente în P, deci sunt coplanare, așadar și dreptele $AB = XX_1$ și $CD = YY_1$ sunt coplanare, fals. **1p**

I Dacă P este mijlocul lui MN, alegem X și Y mijloacele muchiilor AB, respectiv CD. În acest caz, P este mijlocul diagonalei MN a paralelogramului $MXNY$, deci este și mijlocul diagonalei XY. **1p**

II Fie $P \in (MN)$ astfel încât $\dfrac{PM}{PN} = k < 1$ (cazul $k > 1$ este analog). Alegem $X \in (AB)$ și $Y \in (CD)$, cu $\dfrac{XA}{XB} = \dfrac{YC}{YD} = k$. Din (1) rezultă că dreptele XY și MN sunt concurente într-un punct Q. Arătăm că $Q = P$.

Fie $\{R\} = XM \cap BC$. Deoarece $\dfrac{XA}{XB} = k < 1$, punctul C se află între B și R. Cum $R \in BC \subset (DBC)$ și $R \in XM \subset (QXM)$, deducem că $R \in (DBC) \cap (QXM) = YN$, deci $BC \cap XM \cap YN = \{R\}$.

Aplicăm succcesiv teorema lui Menelaus, în $\triangle\, MNR$ (cu transversala $X - Q - Y$), în $\triangle\, CMR$ (cu transversala $A - X - B$), în $\triangle\, BNR$ (cu transversala $D - Y - C$) și în $\triangle\, ABC$ (cu transversala $R - M - X$) și obținem: $\dfrac{QM}{QN} = \dfrac{XM}{XR} \cdot \dfrac{YR}{YN}$, $\dfrac{XM}{XR} = \dfrac{BC}{BR} \cdot \dfrac{AM}{AC} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{BC}{BR}$, $\dfrac{YR}{YN} = \dfrac{DB}{DN} \cdot \dfrac{CR}{CB} = 2 \cdot \dfrac{CR}{CB}$, $\dfrac{RC}{RB} = \dfrac{XA}{XB} \cdot \dfrac{MC}{MA} = k$. Din egalitățile precedente deducem: $\dfrac{QM}{QN} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{BC}{BR} \cdot 2 \cdot \dfrac{CR}{CB} = \dfrac{RC}{RB} = k = \dfrac{PM}{PN}$, așadar $Q = P$. **3p**