Ministerul Educației

Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Naţională, Craiova, 11 aprilie 2023

CLASA a IX-a – soluţii

Problema 1. Se consideră ecuația $x^2+(a+b-1)x+ab-a-b=0$, unde a și b sunt numere naturale nenule cu $a \leq b$.

a) Arătați că ecuația are două soluții reale distincte.

b) Demonstrați că dacă o soluție a ecuației este număr întreg, atunci ambele soluții sunt numere întregi nepozitive și $b<2a$.

Soluție. a) Discriminantul ecuației este $\Delta=(a+b-1)^2-4(ab-a-b)=(a-b)^2+2a+2b+1>0$, deci ecuația are două soluții reale distincte **2p**

b) Dacă $x_1<x_2$ sunt cele două soluții ale ecuației, din prima relație a lui *Viète*, $x_1+x_2=1-a-b \in \mathbb{Z}$, deci $x_1 \in \mathbb{Z} \Longleftrightarrow x_2 \in \mathbb{Z}$ **1p**

Fie $f(x)=x^2+(a+b-1)x+ab-a-b,\ x \in \mathbb{R}$. Întrucât $f(1)=ab>0,\ f(-a)=-b<0,\ f(-b)=-a<0$, folosind semnul funcției de gradul doi deducem că $x_1<-b \leq -a<x_2<1$, deci ambele soluții sunt nepozitive.

.... **1p**

Astfel, $a \geq 1-x_2,\ b \geq 1-x_2$ și din $f(x_2)=0$, deducem $(a-1+x_2)\cdot(b-1+x_2)=1-x_2 \geq 1$. Rezultă că $d_1=a-1+x_2$ și $d_2=b-1+x_2$ sunt divizori naturali ai numărului $1-x_2$ și $d_1d_2=1-x_2,\ a=d_1+d_1d_2,\ b=d_2+d_1d_2$. Obținem $2a-b=2d_1+d_2(d_1-1) \geq 2d_1>0$, adică $b<2a$. **3p**

Problema 2. Determinați funcțiile $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, cu proprietatea că

$$f(f(x))+y \cdot f(x) \leq x+x \cdot f(f(y)),$$

pentru orice x și y numere reale.

Soluție. Pentru $x=0$ în relația inițială obținem $f(f(0))+yf(0) \leq 0$, pentru orice $y \in \mathbb{R}$, relație adevărată doar dacă $f(0)=0$. Într-adevăr dacă $f(0) \neq 0$, atunci $y \leq \dfrac{-f(f(0))}{f(0)}$ pentru orice $y \in \mathbb{R}$, sau $y \geq \dfrac{-f(f(0))}{f(0)}$ pentru orice $y \in \mathbb{R}$, imposibil. **1p**

Alegând $y=0$, va rezulta $f(f(x)) \leq x$, pentru orice x real. (1) **1p**

Pentru $x=1$ în relația inițială obținem $f(f(1))+yf(1) \leq 1+f(f(y))$, și folosind (1) va rezulta $f(f(1))+yf(1) \leq 1+y$, deci $y(f(1)-1) \leq 1-(f(f(1))$, pentru orice y real, relație adevărată la fel ca mai sus doar dacă $f(1)-1=0$, adică $f(1)=1$. **1p**

În aceste condiții relația din ipoteză, pentru $x=1$, asigură că $y \leq f(f(y))$, pentru orice y real. (2) **1p**

Din (1) și (2) obținem că $f(f(x))=x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, și, folosind ipoteza reiese că $x+yf(x) \leq x+xy$, deci $yf(x) \leq xy$ pentru orice $x,\ y \in \mathbb{R}$. **1p**

Pentru $y=1$ rezultă $f(x) \leq x$ iar pentru $y=-1$ rezultă $f(x) \geq x$, deci $f(x)=x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, funcție care verifică relația din ipoteză. **2p**

Problema 3. Fie $n \geq 2$ un număr natural. Considerăm un pătrat de latură $2n-1$ pe care îl împărțim prin paralele la laturi în $(2n-1)^2$ pătrate unitate. Ana și Bogdan joacă următorul joc: începând cu Ana, cei doi colorează alternativ, Ana cu roșu iar Bogdan cu albastru, în $2n^2$ ture, cele $4n^2$ vârfuri ale pătratelor unitate. Apoi, începând cu Ana, fiecare unește printr-un vector un punct roșu (care va fi originea) cu un punct albastru (care va fi vârful), rezultând astfel $2n^2$ vectori cu originile și vârfurile distincte. Dacă suma acestor vectori este nulă, Ana câștigă. Altfel, câștigă Bogdan.

Arătați că Bogdan are o strategie câștigătoare.

Soluție.

Fie O centrul pătratului, $A_1, A_2, \ldots, A_{2n^2}$ punctele albastre și $R_1, R_2, \ldots, R_{2n^2}$ punctele roșii. Ana va câștiga dacă

$$\sum_{i=1}^{2n^2} \overrightarrow{R_i A_{a_i}} = \overrightarrow{0} \ (1),$$

pentru o anumită rearanjare $a_1, a_2, \ldots, a_{2n^2}$ a numerelor $1, 2, \ldots, 2n^2$.

Relația (1) se scrie echivalent

$$\sum_{i=1}^{2n^2} (\overrightarrow{OA_{a_i}} - \overrightarrow{OR_i}) = \overrightarrow{0} \iff \sum_{i=1}^{2n^2} \overrightarrow{OR_i} = \sum_{i=1}^{2n^2} \overrightarrow{OA_{a_i}} \iff \sum_{i=1}^{2n^2} \overrightarrow{OR_i} = \sum_{i=1}^{2n^2} \overrightarrow{OA_i} \ (2),$$

.... **2p**

Cum O este centru de simetrie pentru mulțimea celor $4n^2$ puncte colorate, avem

$$\sum_{i=1}^{2n^2} \overrightarrow{OR_i} + \sum_{i=1}^{2n^2} \overrightarrow{OA_i} = \overrightarrow{0}.$$

Astfel, relația (2) este echivalentă cu

$$\sum_{i=1}^{2n^2} \overrightarrow{OR_i} = \overrightarrow{0} \ (3).$$

Așadar Ana câștigă dacă și numai dacă vectorii cu originea în O și cu vârful în punctele roșii au suma nulă. **2p**

Pentru a câștiga, Bogdan poate proceda astfel: după ce Ana colorează cu roșu un punct în penultima tură, calculează $\overrightarrow{s} = \sum_{i=1}^{2n^2-1} \overrightarrow{OR_i}$.

Dacă există punctul încă necolorat X astfel încât $\overrightarrow{OX} = -\overrightarrow{s}$, atunci el îl colorează pe X cu albastru. Astfel, el o va împiedica pe Ana să câștige deoarece

$$\sum_{i=1}^{2n^2} \overrightarrow{OR_i} = \overrightarrow{OR_{2n^2}} + \overrightarrow{s} = \overrightarrow{OR_{2n^2}} - \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{XR_{2n^2}} \neq \overrightarrow{0}.$$

.... **2p**

În caz contrar, Bogdan colorează orice punct rămas, întrucât relația (3) nu se poate îndeplini. **1p**

Problema 4. Fie numerele reale $r, s \in [1, \infty)$ cu proprietatea că pentru orice numere naturale nenule a, b, cu a divide b, rezultă $[ar]$ divide $[bs]$.

a) Demonstrați că $\dfrac{s}{r}$ este număr natural.

b) Arătați că r și s sunt numere naturale.

Am notat cu $[x]$ partea întreagă a numărului real x.

Soluție. a) Presupunem prin absurd că $\dfrac{s}{r} \notin \mathbb{N}$.

Atunci există $k \in \mathbb{N}$ astfel înât $k < \dfrac{s}{r} < k+1 \Longleftrightarrow kr < s < (k+1)r$.

Alegem $b = a \in \mathbb{N}^*$, variabil și obținem că $[ar] \mid [as]$ de unde $[ar] \mid [as] - k[ar]$ (**1**) **1p**

Din $s > kr$, deducem că există $u > 0$ astfel încât $us > ukr + 2$ și astfel pentru orice $a > u$ avem $as > akr + 2 \Longrightarrow [as] \geq [akr] + 2 > akr + 1 > k[ar]$, deci $[as] > k[ar]$. **1p**

Din (1) rezultă că $[as] - k[ar] \geq [ar] \Longleftrightarrow [as] \geq (k+1)[ar]$, deci,

$$as > (k+1)(ar-1) \Longleftrightarrow k+1 > a((k+1)r - s),$$

pentru orice $a > u$.

Astfel, $a < \dfrac{k+1}{(k+1)r - s}$, pentru orice $a > u$, contradicție, deci presupunerea făcută este falsă. **1p**

b) Să arătăm că s este natural.

Vom arăta că pentru orice $a \in \mathbb{N}$ astfel încât $ar \geq 2$, rezultă $as \in \mathbb{N}$.

Dacă prin absurd $as \notin \mathbb{N}$, atunci va exista $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\dfrac{1}{n+1} \leq \{as\} < \dfrac{1}{n}$, deci $1 \leq (n+1)\{as\} < \dfrac{n+1}{n} \leq 2$, adică $[(n+1)\{as\}] = 1$.

Obținem $[(n+1)as] = [(n+1)[as] + (n+1)\{as\}] = (n+1)[as] + [(n+a)\{as\}] = (n+1)[as] + 1$.

Cum $[ar] \mid [as]$ și $[ar] \mid [(n+1)as]$, rezultă că $[ar] \mid 1 \Longrightarrow [ar] = 1$, imposibil.

Așadar $as \in \mathbb{N}$,pentru orice $a \in \mathbb{N}$ cu $ar \geq 2$, de unde $(a+1)s \in \mathbb{N}$, deci $(a+1)s - as = s \in \mathbb{N}$. **2p**

Să arătăm în final că r este natural.

Fie p un număr prim oarecare cu $p[r] > s$ și $m = [p\{r\}]$. Cum $p\{r\} < p$, deducem $m < p$.

Dacă prin absurd $m \neq 0$, atunci $(m, p) = 1$. Cum $[pr] \mid ps \Longrightarrow [p([r] + \{r\})] \mid ps \Longrightarrow p[r] + m \mid ps$.

Deoarece $(p[r] + m, p) = 1 \Longrightarrow p[r] + m \mid s$, imposibil, căci $p[r] > s$.

Așadar $m = 0 \Longrightarrow p\{r\} < 1 \Longrightarrow \{r\} < \dfrac{1}{p}$, oricare ar fi p, prim, cu $p > \dfrac{s}{[r]} \Longrightarrow \{r\} = 0$ și deci $r \in \mathbb{N}$. **2p**