MINISTERUL EDUCAȚIEI

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Craiova, 11 aprilie 2023

CLASA a X-a – soluții și bareme

Problema 1. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația:

$$2(5^x + 6^x - 3^x) = 7^x + 9^x.$$

Soluție.
Observăm că $x = 0$ și $x = 1$ sunt soluții ale ecuației. **1p**
Demonstrăm că acestea sunt unicele soluții. Ecuația din enunț se poate rescrie:

$$5^x\left(\left(\frac{7}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x - 2\right) + 6^x\left(\left(\frac{9}{6}\right)^x + \left(\frac{3}{6}\right)^x - 2\right) = 0.$$

.... **1p**
Considerând funcțiile $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_a(x) = a^x + (2-a)^x - 2$, cu $a \in (0,2) \setminus \{1\}$, observăm că acestea sunt strict convexe cu $f_a(0) = f_a(1) = 0$. **2p**
Din stricta convexitate a lui f_a avem:

$$f_a(x) = f_a(x \cdot 1 + (1-x)\cdot 0) < x \cdot f_a(1) + (1-x)\cdot f_a(0) = 0, \quad \forall x \in (0,1),$$

și

$$f_a(1) = f_a\left(\frac{x-1}{x}\cdot 0 + \left(1 - \frac{x-1}{x}\right)\cdot x\right) < \frac{x-1}{x} f_a(0) + \frac{1}{x} f_a(x), \quad \forall x \in (1,\infty),$$

$$f_a(0) = f_a\left(\frac{1}{1-x}\cdot x + \left(1 - \frac{1}{1-x}\right)\cdot 1\right) < \frac{1}{1-x} f_a(x) + \frac{-x}{1-x} f_a(1), \quad \forall x \in (-\infty,0),$$

de unde putem deduce că $f_a(x) > 0$ pentru orice $x \in (-\infty,0) \cup (1,\infty)$. **2p**
Ecuația din enunț se poate rescrie:

$$5^x f_{\frac{7}{5}}(x) + 6^x f_{\frac{9}{6}}(x) = 0,$$

deci membrul stâng este mai mic strict decât 0 pentru $x \in (0,1)$ și este mai mare strict decât 0 pentru $x \in (-\infty,0) \cup (1,\infty)$, adică ecuația are doar soluțiile $x = 0$ și $x = 1$. **1p**

Problema 2. Determinați cel mai mare număr natural k având proprietatea că există numărul natural n astfel încât:

$$\sin(n+1) < \sin(n+2) < \sin(n+3) < \cdots < \sin(n+k).$$

Notă: Aproximarea prin lipsă a lui π la a patra zecimală este $3,1415$.

Soluție. Demonstrăm că maximul căutat este $k = 5$.

Diferența a doi termeni consecutivi este:

$$\sin(n+i+1)-\sin(n+i)=2\sin\frac{1}{2}\cos\frac{2n+2i+1}{2}>0\Leftrightarrow\cos\frac{2n+2i+1}{2}>0.\quad(*)$$

.... **2p**

Presupunem prin reducere la absurd că pentru $k=6$ există un număr natural n astfel încât $\sin(n+1)<\sin(n+2)<\sin(n+3)<\sin(n+4)<\sin(n+5)<\sin(n+6)$. Condiția $(*)$ se reduce la:

$$\cos\left(n+\frac{2i+1}{2}\right)>0,\quad i=\overline{1,5},$$

care ar implica:

$$\cos\left(n+\frac{3}{2}\right)+\cos\left(n+\frac{11}{2}\right)=2\cos 2\cdot\cos\left(n+\frac{7}{2}\right)>0\Rightarrow\cos 2>0,$$

ceea ce este o contradicție. Așadar, $k\leq 5$. **2p**

Pentru $k=5$ trebuie să construim un exemplu care, conform $(*)$, se reduce la a determina un $n\in\mathbb{N}$ pentru care avem $\cos\left(n+\frac{2i+1}{2}\right)>0$, $i=\overline{1,4}$. Funcția $\cos(x)$ este pozitivă pentru $x\in\left[2m\pi-\frac{\pi}{2},2m\pi+\frac{\pi}{2}\right]$, $m\in\mathbb{Z}$. **1p**

Din condiția:

$$2m\pi-\frac{\pi}{2}<n+\frac{3}{2}<n+\frac{9}{2}<2m\pi+\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow(4m-1)\cdot 10\pi<20n+30<20n+90<(4m+1)\cdot 10\pi,$$

folosind încadrarea $3,14<\pi<3,15$, obținem o condiție suficientă:

$$(4m-1)\cdot 31,5<20n+30<20n+90<(4m+1)\cdot 31,4\Rightarrow m\leq 7.$$

.... **1p**

Considerând $m=7$ obținem următoarea încadrare pentru n:

$$\frac{27\pi-3}{2}<n<\frac{29\pi-9}{2},$$

ceea ce, folosind încadrarea $3,141<\pi<3,142$, implică $n=41$. Așadar, pentru $k=5$ putem considera $n=41$, de unde obținem că maximul căutat este $k=5$. **1p**

Notă: Se acordă **3 puncte** pentru orice construcție alternativă pentru $k=5$.

Problema 3. Se consideră triunghiul ABC oarecare și punctele mobile M pe semidreapta BC, N pe semidreapta CA și P pe semidreapta AB care pornesc simultan din B, C și, respectiv, A și se deplasează cu vitezele constante $v_1,v_2,v_3>0$, exprimate prin aceeași unitate de măsură.
(a) Știind că există trei momente distincte în care triunghiul MNP este echilateral, demonstrați că triunghiul ABC este echilateral și, în plus, $v_1=v_2=v_3$.
(b) Demonstrați că dacă $v_1=v_2=v_3$ și există un moment în care triunghiul MNP este echilateral, atunci triunghiul ABC este echilateral.

Soluție. Fie $a,b,c\in\mathbb{C}$ afixele vârfurilor triunghiului ABC. Pentru $t\geq 0$ avem următoarele expresii pentru afixele punctelor $M(t)$, $N(t)$ și $P(t)$:

$$\begin{cases}m(t)=b\cdot(1-v_1\cdot t)+c\cdot v_1\cdot t;\\ n(t)=c\cdot(1-v_2\cdot t)+a\cdot v_2\cdot t;\\ p(t)=a\cdot(1-v_3\cdot t)+b\cdot v_3\cdot t.\end{cases}$$

. . . . **1p**

Condiția ca triunghiul MNP să fie echilateral la un moment dat $t \geq 0$ se poate scrie:

$$m(t) + \varepsilon n(t) + \overline{\varepsilon} p(t) = 0,$$

unde $\varepsilon \in \left\{ \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \right\}$. Această relație este echivalentă cu:

$$t\left(-bv_1 + cv_1 - \varepsilon cv_2 + \varepsilon av_2 - \overline{\varepsilon} av_3 + \overline{\varepsilon} bv_3\right) + b + \varepsilon c + \overline{\varepsilon} a = 0, \quad (*)$$

pentru orice moment $t \geq 0$ pentru care triunghiul MNP este echilateral. **1p**

a) Deoarece relația $(*)$ are loc pentru trei valori distincte $t_1, t_2, t_3 \geq 0$, conform principiului cutiei, există $\varepsilon \in \left\{ \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \right\}$ pentru care relația $(*)$ se va realiza pentru două momente distincte $t_i, t_j \geq 0$, $1 \leq i < j \leq 3$, de unde rezultă că:

$$\begin{cases} (b-c)v_1 + \varepsilon(c-a)v_2 + \overline{\varepsilon}(a-b)v_3 = 0; \\ b + \varepsilon c + \overline{\varepsilon} a = 0. \end{cases}$$

A doua relație de mai sus este echivalentă cu a avea triunghiul ABC echilateral. **1p**

Pe de altă parte, prima relație ne permite să facem o translație a triunghiului ABC astfel încât centrul cercului său circumscris să fie de afix 0. Cum ABC este echilateral, avem $b = \varepsilon a$ și $c = \overline{\varepsilon} a$ sau $b = \overline{\varepsilon} a$ și $c = \varepsilon a$. Fără a pierde generalitatea, considerăm primul caz și obținem:

$$(\varepsilon a - \overline{\varepsilon} a)v_1 + \varepsilon(\overline{\varepsilon} a - a)v_2 + \overline{\varepsilon}(a - \varepsilon a)v_3 = 0 \Rightarrow (\varepsilon - \varepsilon^2)v_1 + (1-\varepsilon)v_2 + (\varepsilon^2 - 1)v_3 = 0,$$

iar prin împărțire cu $1 - \varepsilon \neq 0$ și ținând cont de $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}$, avem:

$$\varepsilon v_1 + v_2 - v_3 - \varepsilon v_3 = 0 \Rightarrow v_1 = v_2 = v_3.$$

. . . . **2p**

Remarcă: Alternativ, din a doua relație, folosind $\overline{\varepsilon} = -1 - \varepsilon$, deducem $b - a = \varepsilon(a - c)$ și apoi, înlocuind în prima relație și împărțind cu $c - a \neq 0$, vom obține $v_1 - v_3 = \varepsilon(v_2 - v_1)$. Mai departe, ținând cont că $v_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1,3}$ vom obține $v_1 = v_2 = v_3$.

b) Dacă $v_1 = v_2 = v_3 = v$, relația $(*)$ se poate scrie:

$$t \cdot v \cdot ((c-b) + \varepsilon(a-c) + \overline{\varepsilon}(b-a)) + b + \varepsilon c + \overline{\varepsilon} a = 0,$$

care este invariantă la translații, rotații și omotetii, deci putem fixa $a = 1$ și $c = \overline{\varepsilon}$ și obținem:

$$(b - \varepsilon)(t \cdot v \cdot (\overline{\varepsilon} - 1) + 1) = 0,$$

iar cum a doua paranteză nu poate fi 0, rămâne $b = \varepsilon$, de unde obținem că triunghiul ABC este echilateral, ceea ce încheie problema. **2p**

Problema 4. Într-un muzeu de artă sunt expuse n tablouri, $n \geq 33$, pentru care sunt folosite în total 15 culori astfel încât oricare două tablouri au cel puțin o culoare comună și nu există două tablouri care să aibă exact aceleași culori. Determinați toate valorile posibile ale lui $n \geq 33$ astfel încât oricum am colora tablourile cu proprietățile de mai sus să putem alege patru tablouri distincte pe care să le numerotăm T_1, T_2, T_3 și T_4, astfel încât orice culoare care este folosită atât în T_1, cât și în T_2, se regăsește în T_3 sau în T_4.

Soluție.

Vom demonstra că orice n pentru care $33 \leq n \leq 2^{14}$ este bun.

Începem prin a observa că dacă avem un tablou T_i în muzeu în care sunt folosite k culori, tabloul în care sunt folosite celelalte $15-k$ culori nu se poate regăsi în muzeu. Așadar, din cele $2^{15}-1$ tablouri posibile a fi obținute cu cele 15 culori, avem maxim 2^{14} tablouri în muzeu, iar maximul se poate atinge dacă am considera toate tablourile care folosesc culoarea c_1 împreună cu toate celelalte 2^{14} submulțimi ale culorilor $\{c_2, \ldots, c_{15}\}$. **1p**

Demonstrăm acum că pentru orice $33 \leq n \leq 2^{14}$ putem găsi tablourile T_1, T_2, T_3, T_4 cu proprietățile din enunț. Prin $T_i \cap T_j$ și $T_i \cup T_j$ înțelegem mulțimea culorilor comune, respectiv mulțimea tuturor culorilor folosite în tablourile T_i și T_j. Trebuie să demonstrăm că există $i_1, i_2, i_3, i_4 \in \{1, 2, \ldots, n\}$ astfel încât:

$$(T_{i_1} \cap T_{i_2}) \subset T_{i_3} \cup T_{i_4}$$

Presupunem prin absurd că oricum am lua $i<j$ și $k<\ell$ din $\{1, 2, \ldots, n\}$ cu $\{i, j\} \cap \{k, \ell\} = \emptyset$, avem:

$$|(T_i \cap T_j) \setminus (T_k \cup T_\ell)| \geq 1.$$

Studiind suma:

$$S = \sum_{\substack{1 \leq i<j \leq n \\ 1 \leq k<\ell \leq n \\ \{i,j\} \cap \{k,\ell\} = \emptyset}} |(T_i \cap T_j) \setminus (T_k \cup T_\ell)|,$$

.... **2p**

observăm că aceasta are $C_n^2 \cdot C_{n-2}^2$ termeni, fiecare dintre aceștia fiind mai mari sau egali cu 1, obținem:

$$S \geq \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{(n-2)(n-3)}{2}.$$

.... **1p**

Facem acum numărarea pentru culorile c_m, $m = \overline{1, 15}$ și fie n_m numărul tablourilor T_i care conțin culoarea c_m. Pentru ca $c_m \in (T_i \cap T_j) \setminus (T_k \cup T_\ell)$, trebuie ca $c_m \in T_i, T_j$ și $c_m \notin T_k, T_\ell$. Dacă $n_m \in \{0, 1, n-1, n\}$, atunci nu există tuplet (T_i, T_j, T_k, T_ℓ) pentru care $c_m \in (T_i \cap T_j) \setminus (T_k \cup T_\ell)$. Pentru $2 \leq n_m \leq n-2$ perechea (T_i, T_j) se poate alege în $C_{n_m}^2$ moduri, iar perechea (T_k, T_ℓ) în $C_{n-n_m}^2$ moduri. Așadar, avem:

$$S = \sum_{\substack{m=1 \\ 2 \leq n_m \leq n-2}}^{15} \frac{n_m(n_m-1)}{2} \frac{(n-n_m)(n-n_m-1)}{2}.$$

.... **2p**

Din inegaliatea mediilor avem $n_m(n-n_m) \leq \left(\frac{n}{2}\right)^2$ și $(n_m-1)(n-1-n_m) \leq \left(\frac{n-2}{2}\right)^2$, de unde obținem:

$$S \leq \sum_{\substack{m=1 \\ 2 \leq n_m \leq n-2}}^{15} \frac{1}{4} \left(\frac{n}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{n-2}{2}\right)^2 \leq 15 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{n-2}{2}\right)^2 < \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{(n-2)(n-3)}{2}, \ \forall n \geq 33,$$

ceea ce este o contradicție. Deci, pentru orice $33 \leq n \leq 2^{14}$ avem patru tablouri cu proprietatea din enunț. **1p**