Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Naţională, Craiova, 11 aprilie 2023

CLASA a XI-a – soluţii şi bareme

Problema 1. *Determinaţi funcţiile de două ori derivabile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică relaţia $(f'(x))^2 + f''(x) \leq 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.*

Soluţie.

Varianta 1.

Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie care satisface condiţiile din enunţ. Definim funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ prin $g(x) = e^{f(x)}$, $x \in \mathbb{R}$. Funcţia g este de două ori derivabilă. Avem $g'(x) = f'(x)e^{f(x)}$ şi $g''(x) = e^{f(x)}\left((f'(x))^2 + f''(x)\right)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ **2p**

Din ipoteză deducem $g''(x) \leq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Atunci funcţia g' este descrescătoare, deci există limitele $\ell_1 = \lim\limits_{x\to-\infty} g'(x)$ şi $\ell_2 = \lim\limits_{x\to\infty} g'(x)$, cu $\ell_1, \ell_2 \in \overline{R}$. **1p**

Cu regula lui l'Hôpital obţinem $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} g'(x) = \ell_1$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} g'(x) = \ell_2$. **1p**

Din $g(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, rezultă $\ell_1 \leq 0$ şi $\ell_2 \geq 0$ **1p**

Cum g' este descrescătoare, cu $\ell_1 \leq 0$ şi $\ell_2 \geq 0$, deducem $g'(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Atunci g este o funcţie constantă, strict pozitivă, deci şi $f = \ln(g)$ este o funcţie constantă. Reciproc, orice funcţie constantă f satisface condiţiile din enunţ **2p**

Varianta 2.

Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie care satisface condiţiile din enunţ. Definim funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ prin $g(x) = e^{f(x)}$, $x \in \mathbb{R}$. Funcţia g este de două ori derivabilă. Avem $g'(x) = f'(x)e^{f(x)}$ şi $g''(x) = e^{f(x)}\left((f'(x))^2 + f''(x)\right)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ **2p**

Din ipoteză rezultă $g''(x) \leq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Atunci g este concavă pe $\mathbb{R}$, deci satisface inegalitatea $\dfrac{g(y)-g(x)}{y-x} \geq \dfrac{g(z)-g(y)}{z-y}$, pentru oricare $x, y, z \in \mathbb{R}$, cu $x < y < z$ **1p**

Arătăm că g este o funcţie constantă. Presupunem prin absurd că există $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, astfel încât $g(a) \neq g(b)$. **1p**

Cazul 1. $g(a) < g(b)$. Din inegalitatea $\dfrac{g(a)-g(x)}{a-x} \geq \dfrac{g(b)-g(a)}{b-a}$, pentru oricare $x < a$, obţinem $g(x) \leq \dfrac{g(b)-g(a)}{b-a}(x-a) + g(a)$, pentru oricare $x \in (-\infty, a)$. Rezultă $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$.

Cazul 2. $g(a) > g(b)$. Din inegalitatea $\dfrac{g(b)-g(a)}{b-a} \geq \dfrac{g(x)-g(b)}{x-b}$, pentru oricare $x > b$, obţinem $g(x) \leq \dfrac{g(b)-g(a)}{b-a}(x-b) + g(b)$, pentru oricare $x \in (b, \infty)$. Rezultă $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = -\infty$.

În ambele cazuri este contrazisă inegalitatea $g(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Prin urmare, g este o funcţie constantă, strict pozitivă, deci şi $f = \ln(g)$ este o funcţie constantă. Reciproc, orice funcţie constantă f satisface condiţiile din enunţ **3p**

Problema 2. *Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Arătaţi că $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(B)$ dacă şi numai dacă există matricele inversabile $X, Y, Z \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ astfel încât $AX + YB = AZB$.*

Soluţie.

1. Presupunem că există matricele inversabile $X, Y, Z \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ astfel încât $AX + YB = AZB$. Atunci $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(AX) = \operatorname{rang}((AZ - Y)B) \leq \operatorname{rang}(B)$. Analog, $\operatorname{rang}(B) \leq \operatorname{rang}(A)$. Rezultă $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(B)$. **3p**

2. Presupunem $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(B) = r$. Atunci există matricele inversabile $T, U, V, W \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ astfel încât $TAU = \begin{pmatrix} I_r & O_{r,n-r} \\ O_{n-r,r} & O_{n-r} \end{pmatrix} = VBW$ **1p**

Rezultă $A\left(UW^{-1}\right) = \left(T^{-1}V\right)B$. Alegem $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât $\det\left(B - \lambda\left(UW^{-1}\right)\right) \neq 0$ şi $\det\left(A + \lambda\left(T^{-1}V\right)\right) \neq 0$. Fie matricele inversabile $X = B - \lambda\left(UW^{-1}\right)$ şi $Y = A + \lambda\left(T^{-1}V\right)$. Obţinem $AX + YB = 2AB - \lambda A\left(UW^{-1}\right) + \lambda\left(T^{-1}V\right)B = AZB$, unde $Z = 2I_n$ **3p**

Problema 3. *Fie un număr natural $n \geq 2$ şi matricele $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, cu proprietatea $A^2B = A$.*

a) Demonstraţi că $(AB - BA)^2 = O_n$.

b) Arătaţi că pentru oricare număr natural $k \leq n/2$ există matricele $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ cu proprietatea din enunţ astfel încât $\operatorname{rang}(AB - BA) = k$.

Soluţie.

a) *Varianta 1.*

Dacă A este inversabilă sau $A = O_n$ atunci $AB - BA = O_n$. Fie $A \neq O_n$, cu $\det(A) = 0$, iar $P \in \mathbb{C}[X]$ polinomul său minimal. Cum $P(0) = 0$ şi $P \neq X$, polinomul P este de forma $P = X^k + a_{k-1}X^{k-1} + \ldots + a_1X$, unde $2 \leq k \leq n$. Din relaţia $P(A)B = O_n$ şi ipoteză, obţinem

$$A^{k-1} + a_{k-1}A^{k-2} + \ldots + a_2A + a_1AB = O_n. \quad (1)$$

Cum P este minimal, avem $a_1 \neq 0$. Ca urmare, $AB = -\dfrac{1}{a_1}\left(A^{k-1} + a_{k-1}A^{k-2} + \ldots + a_2A\right)$, deci AB comută cu A. Rezultă $A = A^2B = A(AB) = ABA$. **2p**

Atunci, înmulţind la dreapta relaţia (1) cu BA, obţinem

$$A^{k-1} + a_{k-1}A^{k-2} + \ldots + a_2A + a_1AB^2A = O_n. \quad (2)$$

Din (1) şi (2) rezultă $a_1(AB^2A - AB) = O_n$. Cum $a_1 \neq 0$, obţinem $AB^2A = AB$ **2p**

Ca urmare,

$$(AB - BA)^2 = (ABA)B - AB^2A - B(A^2B) + B(ABA) = AB - AB - BA + BA = O_n.$$

.... **1p**

a) *Varianta 2.*

Din $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}\left(A^2B\right) \leq \operatorname{rang}\left(A^2\right) \leq \operatorname{rang}(A)$, obţinem $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}\left(A^2\right)$ **1p**

Fie $r = \operatorname{rang}(A)$. Există matricele $X \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{C})$ şi $Y \in \mathcal{M}_{r,n}(\mathbb{C})$, cu $\operatorname{rang}(X) = \operatorname{rang}(Y) = r$, astfel încât $A = XY$. Avem $YX \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C})$ şi

$$r = \operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}\left(A^2\right) = \operatorname{rang}\left((XY)^2\right) = \operatorname{rang}(X(YX)Y) \leq \operatorname{rang}(YX).$$

Rezultă că matricea YX este inversabilă. Multiplicând la stânga cu Y relaţia din ipoteză $(XY)^2B = XY$, obţinem $(YX)^2YB = (YX)Y$. Din inversabilitatea matricei YX, rezultă $YB = (YX)^{-1}Y$, de unde $YBX = I_r$. Atunci $ABA = (XY)B(XY) = X(YBX)Y = XY = A$. **1p**

Pe baza ipotezei şi relaţiei $ABA = A$, deducem

$$(AB - BA)^2 = (AB)^2 + (BA)^2 - AB^2A - BA^2B = (ABA)B + B(ABA) - AB^2A - B(A^2B)$$

$$= AB + BA - AB^2A - BA = AB(I_n - BA)$$

Utilizând relaţiile $ABA = A$ şi $(AB - BA)^2 = AB(I_n - BA)$, demonstrate anterior, obţinem

$$(AB - BA)^3 = AB(I_n - BA)(AB - BA) = AB(AB - BA - BA^2B + (BA)^2)$$

$$= AB(AB - BA - B(A^2B) + B(ABA)) = AB(AB - BA - BA + BA) = AB(AB - BA)$$

$$= (ABA)B - AB^2A = AB - (AB)(BA) = AB(I_n - BA).$$

Astfel, $(AB - BA)^3 = (AB - BA)^2$. (1) **1p**

Fie $\lambda \in \mathbb{C}$ o valoare proprie a matricei $AB - BA$. Din relaţia (1) obţinem $\lambda^3 = \lambda^2$, deci $\lambda \in \{0, 1\}$. Dar $\mathrm{Tr}(AB - BA) = 0$. Atunci matricea $AB - BA$ are toate valorile proprii nule. Ca urmare, $(AB - BA)^n = O_n$. Din relaţia (1) rezultă $(AB - BA)^2 = O_n$. **2p**

b) Alegem $A = \begin{pmatrix} O_{n-k} & O_{n-k,k} \\ O_{k,n-k} & I_k \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} O_{n-k} & C \\ O_{k,n-k} & I_k \end{pmatrix}$, unde $C \in \mathcal{M}_{n-k,k}(\mathbb{C})$ este o matrice cu $\mathrm{rang}(C) = k \leq n - k$ (pentru $k = 0$, vom înţelege $A = B = O_n$). Avem $A^2B = AB = A$, $BA = B$ şi $AB - BA = A - B = \begin{pmatrix} O_{n-k} & -C \\ O_{k,n-k} & O_k \end{pmatrix}$, deci $\mathrm{rang}(AB - BA) = k$. **2p**

Remarcă. Reciproc, pentru oricare $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel ca $A^2B = A$, are loc inegalitatea $\mathrm{rang}(AB - BA) \leq n/2$.

Problema 4. *Considerăm o funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pentru care există o funcţie derivabilă $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi există un şir $(a_n)_{n\geq 1}$ de numere reale strict pozitive, convergent la 0, astfel încât*

$$g'(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x + a_n) - f(x)}{a_n},$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

a) Daţi un exemplu de o astfel de funcţie f care nu este derivabilă în niciun punct $x \in \mathbb{R}$.

b) Arătaţi că dacă f este continuă pe $\mathbb{R}$ atunci f este derivabilă pe $\mathbb{R}$.

Soluţie.

a) Considerăm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$. Fie şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, cu termenii strict pozitivi $a_n = 1/n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, convergent la 0. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, avem $x + a_n \in \mathbb{Q}$, $\forall x \in \mathbb{Q}$ şi $x + a_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Astfel, $f(x + a_n) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Rezultă

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(x+a_n)-f(x)}{a_n} = 0 = g'(x),\ \forall\, x \in \mathbb{R}$, unde g este o funcţie constantă arbitrară. Funcţia f este discontinuă în orice punct $x \in \mathbb{R}$, deci nederivabilă în orice punct $x \in \mathbb{R}$. **2p**

b) Considerăm funcţia $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h = f - g$. Funcţia h este continuă ca diferenţă de funcţii continue **1p**

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{h\left(x+a_n\right)-h(x)}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f\left(x+a_n\right)-f(x)}{a_n} - g'(x) = 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ **1p**

Fie $x, y \in \mathbb{R}$, cu $x < y$. Fie $c > 0$ şi $A(c) = \{z \in [x,y] \,|\, |h(z)-h(x)| \leq c(z-x)\}$. Cum $x \in A(c) \subset [x,y]$, există $s = \sup A(c) \in [x,y]$. Din continuitatea lui h rezultă $s \in A(c)$. Presupunem, prin absurd, $s < y$. Atunci există $n_1 \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $s + a_n < y,\ \forall\, n \geq n_1$. Din $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{h\left(s+a_n\right)-h(s)}{a_n} = 0$, rezultă că există $n_2 \geq n_1$ astfel ca $\left|\dfrac{h\left(s+a_{n_2}\right)-h(s)}{a_{n_2}}\right| < c$. Atunci $s < s + a_{n_2} < y$ şi au loc inegalităţile

$$\left|h\left(s+a_{n_2}\right)-h(x)\right| \leq |h(s)-h(x)| + \left|h\left(s+a_{n_2}\right)-h(s)\right| < c(s-x) + ca_{n_2} = c\left[\left(s+a_{n_2}\right)-x\right].$$

Rezultă $s + a_{n_2} \in A(c)$, în contradicţie cu $s = \sup A(c)$. Prin urmare $y = s \in A(c)$, deci $|h(y)-h(x)| \leq c(y-x)$. Cum $c > 0$ este arbitrar, deducem $h(x) = h(y)$. Rezultă că h este o funcţie constantă **2p**

Atunci $f = g + h$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$, cu $f' = g'$ **1p**