



Barem de evaluare și notare

Subiectul 1. <i>Circuite electrice ...</i>		Parțial	Punctaj
Barem subiectul 1			10
a.	Capacitatea electrică a unui condensator format de o armătură fixă și una mobilă este: $C_i = \frac{\epsilon_0 S}{d}$ unde S reprezintă aria suprafeței suprapuse.	0,20	3
	Din cele n perechi suprapuse se formează $2n - 1$ condensatori grupați în paralel. Capacitatea electrică a grupării de condensatori este: $C = (2n - 1)C_i$	0,25	
	Când armăturile se suprapun pe jumătate avem poziția butonului B pentru care $\alpha = 0$. În acest caz capacitatea electrică a grupării de condensatori este minimă: $C_{\min} = (2n - 1)C_{i\min}$	0,25	
	Unde: $C_{i\min} = \frac{\epsilon_0 S_{\min}}{d}$	0,20	
	Iar: $S_{\min} = \frac{\pi(r_2^2 - r_1^2)}{4}$	0,20	
	Când armăturile se suprapun complet avem poziția butonului B pentru care $\alpha = \pi/2$. În acest caz capacitatea electrică a grupării de condensatori este maximă: $C_{\max} = (2n - 1)C_{i\max}$	0,25	
	Unde: $C_{i\max} = \frac{\epsilon_0 S_{\max}}{d}$	0,20	
	Iar: $S_{\max} = \frac{\pi(r_2^2 - r_1^2)}{2}$	0,20	
	Pozițiile butonului B pentru care $\alpha \in (0, \pi/2)$ ne duc la relația: $C = (2n - 1) \frac{\epsilon_0}{d} \int \frac{(r_2^2 - r_1^2)}{2} d\alpha$	0,25	
	Deci: $C = (2n - 1) \frac{\epsilon_0}{2d} (r_2^2 - r_1^2) \alpha + C_0$	0,25	
	Constanta de integrare C_0 o obținem pentru $\alpha = 0$, adică: $C_0 = C_{\min}$	0,25	
	Rezultă: $C = \frac{C_{\max}}{\pi} \alpha + C_{\min}$	0,25	
	Numeric: $C = 5,64 \cdot 10^{-12} \text{ F}$	0,25	

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul final va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu ponderea ideilor corecte din rezolvarea elevului.



Barem de evaluare și notare

b.	Frecvența circuitului oscilant în funcție de unghiul de rotire este: $\nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$	0,20	2
	Rezultă: $\nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{L\left(\frac{C_{\max}}{\pi}\alpha + C_{\min}\right)}}$	0,20	
	Frecvența minimă a circuitului oscilant este: $\nu_{\min} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_{\max}}}$	0,20	
	Numeric: $\nu_{\min} = 1,84 \cdot 10^6 \text{ Hz}$	0,20	
	Frecvența maximă a circuitului oscilant este: $\nu_{\max} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_{\min}}}$	0,20	
	Numeric: $\nu_{\max} = 2,60 \cdot 10^6 \text{ Hz}$	0,20	
	Reprezentarea grafică a frecvenței circuitului oscilant în funcție de unghiul de rotire.	0,80	
c.	Ecuția tensiunilor pentru circuitul oscilant este: $L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = 0$	0,25	3
	Dar: $i = \frac{dq}{dt}$	0,25	
	Deci: $L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$	0,25	
	Sau: $\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = 0$	0,25	
	Factorul de amortizare este: $\delta = \frac{R}{2L}$	0,25	
	Obținem soluția: $q = q_{\max} e^{-\delta t} \cos \omega t$	0,25	
	Pulsția circuitului oscilant este: $\omega = \sqrt{\omega_p^2 - \delta^2}$	0,25	

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul final va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu ponderea ideilor corecte din rezolvarea elevului.



Barem de evaluare și notare

	Pulsația proprie a circuitului oscilant este: $\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC_p}}$	0,25	
	Dar $Z_0 = 4R$, unde: $Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C_p}}$	0,25	
	Efectuând calculele, rezultă: $i = -q_{\max} e^{-\frac{R}{2L}t} \left[\frac{R}{2L} \cos\left(\frac{3R}{2L}\sqrt{7}\right)t + \frac{3R}{2L}\sqrt{7} \sin\left(\frac{3R}{2L}\sqrt{7}\right)t \right]$	0,50	
	Pentru $t = T/6$: $i = -6,78 \text{ A}$	0,25	
d.	Ecuția tensiunilor pentru noul circuit este: $E - L \frac{di}{dt} = Ri \Leftrightarrow -\frac{L}{R} \frac{di}{dt} = i - \frac{E}{R}$	0,30	2
	Separând variabilele obținem: $\frac{di}{i - \frac{E}{R}} = -\frac{R}{L} dt$	0,40	
	Deci: $\int_{i_0}^i \left(\frac{1}{i - \frac{E}{R}} \right) di = -\frac{R}{L} \int_{t_0}^t dt \Leftrightarrow \int_0^i \left(\frac{1}{i - \frac{E}{R}} \right) di = -\frac{R}{L} \int_0^t dt$	0,30	
	Efectuând calculele, se ajunge la relația: $\ln \left(\frac{i - \frac{E}{R}}{-\frac{E}{R}} \right) = -\frac{R}{L} t$	0,40	
	Rezultă: $i = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right)$	0,30	
	Pentru $t \rightarrow \infty$: $i = 4,8 \text{ A}$	0,30	

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul final va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu ponderea ideilor corecte din rezolvarea elevului.



Barem de evaluare și notare

Subiectul 2. Atomul de hidrogen ...		Parțial	Punctaj
Barem subiectul 2			10
a.	Principiului incertitudinii a lui Heisenberg poate fi scris sub forma: $\Delta r \Delta p_r \sim \frac{h}{2\pi}$	0,20	3
	Deci: $\Delta p \sim \frac{h}{2\pi \Delta r}$	0,10	
	Pentru: $\Delta r \sim r$ $\Delta p \sim p$	0,20	
	Obținem: $p \sim \frac{h}{2\pi r}$	0,10	
	Energia cinetică a electronului pe o orbită staționară este: $E_c = \frac{m_e v^2}{2}$	0,20	
	Unde: $p = m_e v$	0,20	
	Deci: $E_c = \frac{p^2}{2m_e}$	0,20	
	Sau: $E_c = \frac{h^2}{8\pi^2 m_e r^2}$	0,20	
	Energia potențială a electronului pe o orbită staționară este: $E_p = -\frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 r}$	0,20	
	Energia totală a sistemului poate fi scrisă sub forma: $E = E_c + E_p$	0,20	
	Sau: $E = \frac{h^2}{8\pi^2 m_e r^2} - \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 r}$	0,20	
	Energia totală este minimă dacă este îndeplinită condiția: $\frac{dE}{dr} = 0$	0,20	
	Deci: $-\frac{h^2}{4\pi^2 m_e r^3} + \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 r^2} = 0$	0,20	
Distanța față de nucleu corespunzătoare energiei minime este dată de relația: $r_1 = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m_e e^2}$	0,20		

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul final va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu ponderea ideilor corecte din rezolvarea elevului.



Barem de evaluare și notare

	Rezultă: $E_{min} = -\frac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^2}$	0,20	
	Numeric: $E_{min} = -21,79 \cdot 10^{-19} \text{ J}$	0,20	
b.	În cazul ionizării atomului de hidrogen raza orbitei electronului, $r_{ionizare}$, este redusă la cazul în care energia electronului în atomul de hidrogen este: $E = 0$	0,25	1
	Deci: $\frac{h^2}{8\pi^2 m_e r_{ionizare}^2} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_{ionizare}} = 0$	0,25	
	Rezultă: $r_{ionizare} = \frac{\varepsilon_0 h^2}{2\pi m_e e^2}$	0,25	
	Numeric: $r_{ionizare} = 2,646 \cdot 10^{-11} \text{ m}$	0,25	
c.	Inducția câmpului magnetic în centrul orbitei n este: $B_n = \mu_0 \frac{I_n}{2r_n}$	0,20	3
	Intensitatea curentului electric datorat mișcării electronului în jurul nucleului atomului de hidrogen pentru orbita corespunzătoare numărului cuantic principal n este: $I_n = \frac{e}{T_n}$	0,20	
	Perioada de rotație a electronului pe orbita corespunzătoare numărului cuantic principal n este: $T_n = \frac{2\pi r_n}{v_n}$	0,20	
	Obținem: $I_n = \frac{e v_n}{2\pi r_n}$	0,20	
	Sau: $I_n = \frac{e m_e v_n r_n}{2\pi r_n^2}$	0,20	
	Momentului cinetic orbital pentru orbita corespunzătoare numărului cuantic principal n este: $ \vec{L}_n = m_e v_n r_n$	0,20	
	Dar: $2\pi r_n = n\lambda$	0,20	

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul final va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu ponderea ideilor corecte din rezolvarea elevului.



Barem de evaluare și notare

	Unde: $\lambda = \frac{h}{m_e v_n}$	0,20	
	Deci: $ \vec{L}_n = n \frac{h}{2\pi}$	0,20	
	Condiția de stabilitate a orbitei de rază r_n este: $\frac{m_e v_n^2}{r_n} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n^2}$	0,20	
	Sau: $(m_e v_n r_n)^2 = r_n \frac{m_0 e^2}{4\pi\epsilon_0}$	0,20	
	Deci: $r_n = n^2 \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m_e e^2}$	0,20	
	Intensitatea curentului electric datorat mișcării electronului în jurul nucleului atomului de hidrogen pentru orbita corespunzătoare numărului cuantic principal n poate fi scrisă acum sub forma: $I_n = \frac{1}{n^3} \frac{m_e e^5}{4\epsilon_0^2 h^3}$	0,20	
	Rezultă: $B_n = \frac{1}{n^5} \mu_0 \frac{\pi m_e^2 e^7}{8\epsilon_0^3 h^5}$	0,20	
	Numeric: $B_1 = 12,51 \text{ T}$	0,20	
d.	Cel mai mic număr de niveluri energetice se obține în cazul tranzițiilor între nivelurile energetice învecinate: $\frac{1}{\lambda} = R \left[\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2} \right]$	0,25	1,5
	Sau: $\frac{1}{\lambda} = R \frac{1}{n^2} \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2} - 1 \right]$	0,25	
	Deoarece $n \gg 1$, obținem: $\frac{1}{\lambda} = \frac{2R}{n^3}$	0,20	
	Deci: $n = \sqrt[3]{2R\lambda}$	0,20	
	Pentru $\lambda_1 = 1 \text{ cm}$: $n_1 = 60$	0,15	

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul final va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu ponderea ideilor corecte din rezolvarea elevului.



Barem de evaluare și notare

Pentru $\lambda_2 = 10 \text{ cm}$:	$n_2=129$	0,15	
Pentru $\lambda_3 = 10^2 \lambda_1$:	$n_3=279$	0,15	
Pentru $\lambda_4 = 10^3 \lambda_1$:	$n_4=603$	0,15	
e.	Diferența de energie între nivelurile corespunzătoare a primei linii din seria Balmer se poate scrie sub forma: $\varepsilon = Rch \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right)$	0,20	1,5
	Sau: $\varepsilon = \frac{5}{36} Rch$	0,20	
	Aplicăm legea de conservare a energiei: $\varepsilon = hv' + \frac{(m_e + m_p)v^2}{2}$	0,20	
	Aplicăm legea de conservare a impulsului: $(m_e + m_p)v - \frac{hv'}{c} = 0$	0,20	
	Din aceste relații obținem ecuația: $18(m_e + m_p)v^2 + 36(m_e + m_p)cv - 5Rch = 0$	0,20	
	Soluția acceptată este: $v = c \left(\sqrt{1 + \frac{5Rh}{18(m_e + m_p)c}} - 1 \right)$	0,20	
	Unde: $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$	0,10	
	Deci: $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \left(\sqrt{1 + \frac{5Rh\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}{18(m_e + m_p)}} - 1 \right)$	0,10	
Numeric: $v = 6,031 \cdot 10^{-1} \frac{\text{m}}{\text{s}}$	0,10		

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul final va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu ponderea ideilor corecte din rezolvarea elevului.



Barem de evaluare și notare

Subiectul 3. Viteza relativă relativistă		Parțial	Punctaj
Barem subiectul 3			10
	<p>Știind că:</p> $\vec{r}' = \vec{r} - \frac{(\vec{r} \cdot \vec{v}_0) \cdot \vec{v}_0}{v_0^2} \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} \right) - \frac{\vec{v}_0 \cdot t}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}};$ $t' = \frac{t - \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}_0}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}; \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} = \beta;$ $\vec{r}' = \vec{r} - \frac{(\vec{r} \cdot \vec{v}_0) \cdot \vec{v}_0}{v_0^2} \cdot (1 - \beta) - \beta \cdot \vec{v}_0 \cdot t;$ $t' = \beta \cdot \left(t - \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}_0}{c^2} \right),$	0,25	
a.	<p>după diferențierea ultimelor două relații rezultă:</p> $d\vec{r}' = d\vec{r} - \frac{(d\vec{r} \cdot \vec{v}_0) \cdot \vec{v}_0}{v_0^2} \cdot (1 - \beta) - \beta \cdot \vec{v}_0 \cdot dt; d\vec{r} = \vec{v} \cdot dt;$ $dt' = \beta \cdot \left(dt - \frac{d\vec{r} \cdot \vec{v}_0}{c^2} \right) = \beta \cdot \left(1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}_0}{c^2} \right) \cdot dt,$ <p>unde $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ este viteza punctului material P în raport cu sistemul inerțial fix;</p> $\frac{d\vec{r}'}{dt'} = \vec{v}',$ <p>reprezentând viteza aceluiași punct material, P, în raport cu sistemul inerțial mobil,</p>	0,25	3
	<p>rezultă :</p> $\frac{d\vec{r}'}{dt'} = \vec{v}' = \frac{d\vec{r} - \frac{(d\vec{r} \cdot \vec{v}_0) \cdot \vec{v}_0}{v_0^2} \cdot (1 - \beta) - \beta \cdot \vec{v}_0 \cdot dt}{\beta \cdot \left(1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}_0}{c^2} \right) \cdot dt};$ $\vec{v}' = \frac{d\vec{r}}{dt} - \frac{\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{v}_0 \right) \cdot \vec{v}_0}{v_0^2} \cdot (1 - \beta) - \beta \cdot \vec{v}_0}{\beta \cdot \left(1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}_0}{c^2} \right)}; \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v};$	0,25	

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul final va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu ponderea ideilor corecte din rezolvarea elevului.

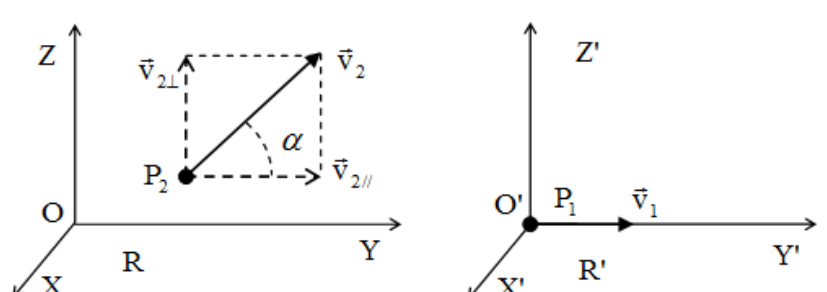
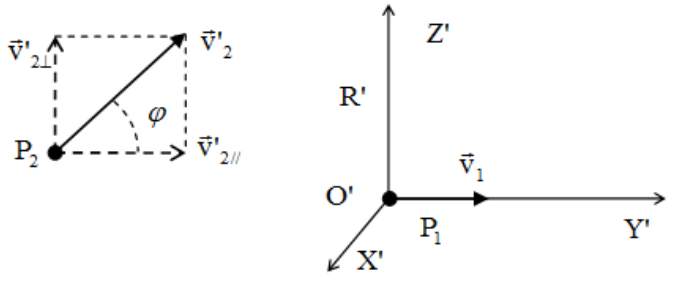


Barem de evaluare și notare

	$\vec{v}' = \frac{\vec{v} - \frac{(\vec{v} \cdot \vec{v}_0) \cdot \vec{v}_0}{v_0^2} \cdot (1 - \beta) - \beta \cdot \vec{v}_0}{\beta \cdot \left(1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}_0}{c^2}\right)}; \vec{v}' = \frac{\vec{v} + \frac{\beta - 1}{v_0^2} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{v}_0) \cdot \vec{v}_0 - \beta \cdot \vec{v}_0}{\beta \cdot \left(1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}_0}{c^2}\right)},$ <p>unde $\vec{v}_0 = v_0 \cdot \vec{j}$ este viteza de translație a sistemului mobil față de sistemul fix.</p>		
	<p>Pentru cazul general, când vectorii \vec{v} și \vec{v}' au câte o componentă paralelă cu \vec{v}_0 și câte o componentă perpendiculară pe \vec{v}_0, rezultă:</p> $\vec{v} = \vec{v}_{//} + \vec{v}_{\perp}; \vec{v}' = \vec{v}'_{//} + \vec{v}'_{\perp};$ $\vec{v} \cdot \vec{v}_0 = (\vec{v}_{//} + \vec{v}_{\perp}) \cdot \vec{v}_0 =$ $\vec{v}_{//} \cdot \vec{v}_0 + \vec{v}_{\perp} \cdot \vec{v}_0 = v_{//} \cdot v_0 \cdot \cos 0^\circ + v_{\perp} \cdot v_0 \cdot \cos 90^\circ = v_{//} \cdot v_0;$ $\vec{v}' = \frac{\vec{v} + \frac{\beta - 1}{v_0^2} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{v}_0) \cdot \vec{v}_0 - \beta \cdot \vec{v}_0}{\beta \cdot \left(1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}_0}{c^2}\right)}; \vec{v}_0 = v_0 \cdot \vec{j}; \vec{v}_{//} = v_{//} \cdot \vec{j};$ $\vec{v}'_{//} + \vec{v}'_{\perp} = \frac{\vec{v}_{//} + \vec{v}_{\perp} + \frac{\beta - 1}{v_0^2} \cdot (v_{//} \cdot v_0) \cdot v_0 \cdot \vec{j} - \beta \cdot \vec{v}_0}{\beta \cdot \left(1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}_0}{c^2}\right)};$ $\vec{v}'_{//} + \vec{v}'_{\perp} = \frac{\vec{v}_{//} + \vec{v}_{\perp} + (\beta - 1) \cdot v_{//} \cdot \vec{j} - \beta \cdot \vec{v}_0}{\beta \cdot \left(1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}_0}{c^2}\right)};$ $\vec{v}'_{//} + \vec{v}'_{\perp} = \frac{\vec{v}_{//} + \vec{v}_{\perp} + (\beta - 1) \cdot \vec{v}_{//} - \beta \cdot \vec{v}_0}{\beta \cdot \left(1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}_0}{c^2}\right)};$ $\vec{v}'_{//} + \vec{v}'_{\perp} = \frac{\vec{v}_{//} + \vec{v}_{\perp} + \beta \cdot \vec{v}_{//} - \vec{v}_{//} - \beta \cdot \vec{v}_0}{\beta \cdot \left(1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}_0}{c^2}\right)};$ $\vec{v}'_{//} + \vec{v}'_{\perp} = \frac{\vec{v}_{\perp} + \beta \cdot \vec{v}_{//} - \beta \cdot \vec{v}_0}{\beta \cdot \left(1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}_0}{c^2}\right)};$ $\vec{v}'_{//} + \vec{v}'_{\perp} = \frac{\beta \cdot (\vec{v}_{//} - \vec{v}_0) + \vec{v}_{\perp}}{\beta \cdot \left(1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}_0}{c^2}\right)}; \vec{v}'_{//} + \vec{v}'_{\perp} = \frac{(\vec{v}_{//} - \vec{v}_0)}{\left(1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}_0}{c^2}\right)} + \frac{\vec{v}_{\perp}}{\beta \cdot \left(1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}_0}{c^2}\right)},$	0,25	

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul final va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu ponderea ideilor corecte din rezolvarea elevului.

Barem de evaluare și notare

	<p>din care, prin identificare, rezultă:</p> $\vec{v}'_{//} = \frac{\vec{v}_{//} - \vec{v}_0}{1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}_0}{c^2}}; \quad \vec{v}'_{\perp} = \frac{\vec{v}_{\perp}}{\beta \left(1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}_0}{c^2}\right)}$	0,25	
	<p>În desenul din figura 3 este reprezentat sistemul inerțial mobil R', atașat punctului material P₁. Ca urmare, situația din enunțul problemei, este echivalentă cu situația reprezentată în desenul din figura 3, unde, în originea sistemului inerțial R', care se deplasează cu viteza \vec{v}_1, în raport cu sistemul inerțial R, se află în repaus punctul material P₁.</p>  <p style="text-align: center;">Fig. 3</p> <p>În aceste condiții, a determina viteza relativă relativistă a punctului material P₂, în raport cu punctul material P₁, adică $\vec{v}_{21,relativist}$, înseamnă a determina viteza punctului material P₂, în raport cu sistemul inerțial mobil, R', atașat particulei P₁, adică:</p> $\vec{v}_{21,relativist} = \vec{v}'_2.$ <p>Folosind rezultatele anterioare, precum și desenele din figurile 3 și 4, rezultă:</p>  <p style="text-align: center;">Fig. 4</p> $\vec{v}_2 = \vec{v}_{2//OY} + \vec{v}_{2\perp OY} = \vec{v}_{2//} + \vec{v}_{2\perp};$ $\vec{v}_{21,relativist} = \vec{v}'_2 = \vec{v}'_{2//O'Y'} + \vec{v}'_{2\perp O'Y'} = \vec{v}'_{2//} + \vec{v}'_{2\perp} = \vec{v}'_{21}.$	0,50	

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul final va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu ponderea ideilor corecte din rezolvarea elevului.

Barem de evaluare și notare

	<p>Știind că:</p> $\vec{v}'_{//} = \frac{\vec{v}_{//} - \vec{v}_0}{1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}_0}{c^2}}; \vec{v}'_{\perp} = \frac{\vec{v}_{\perp}}{\beta \left(1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}_0}{c^2}\right)}; \vec{v}_0 \equiv \vec{v}_1; \Rightarrow \vec{v} \equiv \vec{v}_2;$ $\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} = \beta; \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} = \beta,$	0,25	
	<p>rezultă :</p> $\vec{v}'_{2//} = \frac{\vec{v}_{2//} - \vec{v}_1}{1 - \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2}}; \vec{v}'_{2\perp} = \frac{\vec{v}_{2\perp}}{\beta \cdot \left(1 - \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2}\right)}; \vec{v}'_{2\perp} =$ $\frac{\vec{v}_{2\perp}}{\left(1 - \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2}\right)} \cdot \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}};$ $\vec{v}'_2 = \vec{v}'_{2//} + \vec{v}'_{2\perp} = \vec{v}_{21};$ $\vec{v}'_2 = \vec{v}_{21} = \vec{v}_{21,relativist} = \frac{\vec{v}_{2//} - \vec{v}_1}{1 - \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2}} + \frac{\vec{v}_{2\perp}}{\left(1 - \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2}\right)} \cdot \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}};$ $\left(\vec{v}_{21,relativist}\right)^2 = \frac{(\vec{v}_{2//} - \vec{v}_1)^2}{\left(1 - \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2}\right)^2} + \frac{(\vec{v}_{2\perp})^2}{\left(1 - \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2}\right)^2} \cdot \left(1 - \frac{v_1^2}{c^2}\right);$ $\left(\vec{v}_{21,relativist}\right)^2 = \frac{(\vec{v}_{2//} - \vec{v}_1)^2 + (\vec{v}_{2\perp})^2 \cdot \left(1 - \frac{v_1^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2}\right)^2};$ $\left(\vec{v}_{21,relativist}\right)^2 = \frac{(\vec{v}_{2//}^2 + \vec{v}_1^2 - 2 \cdot \vec{v}_{2//} \cdot \vec{v}_1) + (\vec{v}_{2\perp})^2 \cdot \left(1 - \frac{v_1^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2}\right)^2};$ $\left(\vec{v}_{21,relativist}\right)^2 = \frac{(\vec{v}_{2//}^2 + \vec{v}_1^2 - 2 \cdot \vec{v}_{2//} \cdot \vec{v}_1) + (\vec{v}_{2\perp})^2 \cdot \left(1 - \frac{v_1^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2}\right)^2};$	0,50	

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul final va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu ponderea ideilor corecte din rezolvarea elevului.

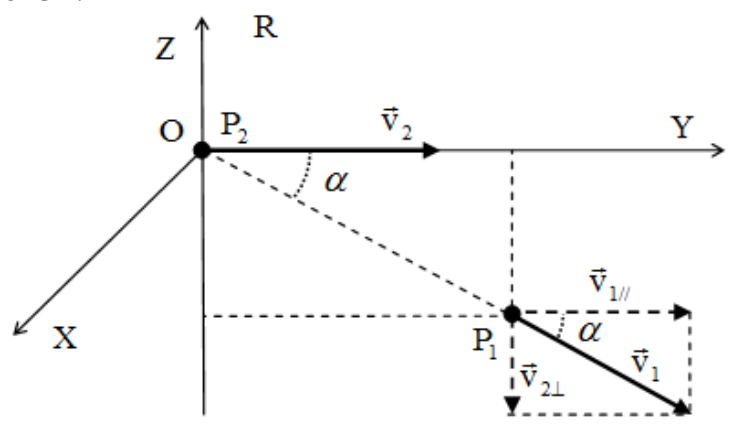


Barem de evaluare și notare

	$(\vec{v}_{21,relativist})^2 = \frac{(\vec{v}_{2//}^2 + \vec{v}_1^2 - 2 \cdot \vec{v}_{2//} \cdot \vec{v}_1) + \vec{v}_{2\perp}^2 - \frac{1}{c^2} \cdot (\vec{v}_{2\perp})^2 \cdot \vec{v}_1^2}{\left(1 - \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2}\right)^2};$ $(\vec{v}_{21,relativist})^2 = \frac{(\vec{v}_{2//}^2 + \vec{v}_{2\perp}^2 + \vec{v}_1^2 - 2 \cdot \vec{v}_{2//} \cdot \vec{v}_1) - \frac{1}{c^2} \cdot (\vec{v}_{2\perp})^2 \cdot \vec{v}_1^2}{\left(1 - \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2}\right)^2};$ $\vec{v}_2 = \vec{v}_{2//} + \vec{v}_{2\perp};$ $\vec{v}_2^2 = (\vec{v}_{2//} + \vec{v}_{2\perp})^2 = \vec{v}_{2//}^2 + \vec{v}_{2\perp}^2 + 2 \cdot \vec{v}_{2//} \cdot \vec{v}_{2\perp};$ $\vec{v}_2^2 = (\vec{v}_{2//} + \vec{v}_{2\perp})^2 = \vec{v}_{2//}^2 + \vec{v}_{2\perp}^2 + 2 \cdot v_{2//} \cdot v_{2\perp} \cdot \cos 90^\circ = \vec{v}_{2//}^2 + \vec{v}_{2\perp}^2;$ $\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1 = (\vec{v}_{2//} + \vec{v}_{2\perp}) \cdot \vec{v}_1 = \vec{v}_{2//} \cdot \vec{v}_1 + \vec{v}_{2\perp} \cdot \vec{v}_1 = \vec{v}_{2//} \cdot \vec{v}_1 + v_{2\perp} \cdot v_1 \cdot \cos 90^\circ;$ $\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1 = \vec{v}_{2//} \cdot \vec{v}_1;$ $(\vec{v}_{21,relativist})^2 = \frac{(\vec{v}_2^2 + \vec{v}_1^2 - 2 \cdot \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1) - \frac{1}{c^2} \cdot (\vec{v}_{2\perp})^2 \cdot \vec{v}_1^2}{\left(1 - \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2}\right)^2};$ $(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)^2 = \vec{v}_2^2 + \vec{v}_1^2 - 2 \cdot \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1;$ $(\vec{v}_{21,relativist})^2 = \frac{(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)^2 - \frac{1}{c^2} \cdot (\vec{v}_{2\perp})^2 \cdot \vec{v}_1^2}{\left(1 - \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2}\right)^2};$ $(\vec{v}_{2\perp})^2 \cdot \vec{v}_1^2 = (\vec{v}_{2\perp} \times \vec{v}_1)^2 = [(\vec{v}_2 - \vec{v}_{2//}) \times \vec{v}_1]^2 = (\vec{v}_2 \times \vec{v}_1)^2 - (\vec{v}_{2//} \times \vec{v}_1)^2;$ $ \vec{v}_{2//} \times \vec{v}_1 = v_{2//} \cdot v_1 \cdot \sin 0^\circ = 0;$ $(\vec{v}_{2\perp})^2 \cdot \vec{v}_1^2 = (\vec{v}_2 \times \vec{v}_1)^2 = (v_1 \cdot v_2 \cdot \sin \alpha)^2;$ $(\vec{v}_{21,relativist})^2 = v_{21,relativist}^2 = \frac{(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)^2 - \frac{1}{c^2} \cdot (\vec{v}_2 \times \vec{v}_1)^2}{\left(1 - \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2}\right)^2};$ $v_{21,relativist} = \frac{\sqrt{(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)^2 - \frac{1}{c^2} \cdot (\vec{v}_2 \times \vec{v}_1)^2}}{1 - \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2}};$		
--	---	--	--

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul final va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu ponderea ideilor corecte din rezolvarea elevului.

Barem de evaluare și notare

	$v_{21,\text{relativist}} = \frac{\sqrt{v_2^2 + v_1^2 - 2 \cdot v_2 \cdot v_1 \cdot \cos \alpha - \frac{v_2^2 \cdot v_1^2 \cdot \sin^2 \alpha}{c^2}}}{1 - \frac{v_1 \cdot v_2 \cdot \cos \alpha}{c^2}},$ <p>reprezentând viteza relativă relativistă a punctului material P₂ în raport cu punctul material P₁;</p>		
	$v'_{2//} = \frac{v_{2//} - v_1}{1 - \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2}}; v'_{2\perp} = \frac{v_{2\perp}}{\beta \left(1 - \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2}\right)}; \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} = \beta;$ $\tan \varphi = \frac{v'_{2\perp}}{v'_{2//}} = \frac{v_{2\perp}}{\beta(v_{2//} - v_1)} = \frac{v_2 \sin \alpha}{v_2 \cos \alpha - v_1} \cdot \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}.$ $\tan \varphi = \frac{v'_{2\perp}}{v'_{2//}} = \frac{v_{2\perp}}{\beta \cdot \left(1 - \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2}\right)} \cdot \frac{1 - \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2}}{v_{2//} - v_1};$ $\tan \varphi = \frac{v_{2\perp}}{(v_{2//} - v_1)} \cdot \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}; \tan \varphi = \frac{v_2 \sin \alpha}{v_2 \cos \alpha - v_1} \cdot \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}},$ <p>unde unghiul φ stabilește orientarea vectorului viteză relativă relativistă al punctului material P₂ față de punctul material P₁.</p>	0,50	
b.	<p>În desenul din figura 5 este reluat sistemul de referință R, față de care cele două puncte materiale se deplasează cu vitezele \vec{v}_1 și respectiv \vec{v}_2, pe două direcții din planul YOZ, unghiul dintre acestea fiind α, așa cum se precizează în enunțul problemei. Deosebirea este aceea că în varianta actuală, punctul material P₂ se deplasează de-a lungul axei OY.</p>  <p style="text-align: center;">Fig. 5</p>	0,25	3

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul final va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu ponderea ideilor corecte din rezolvarea elevului.

Barem de evaluare și notare

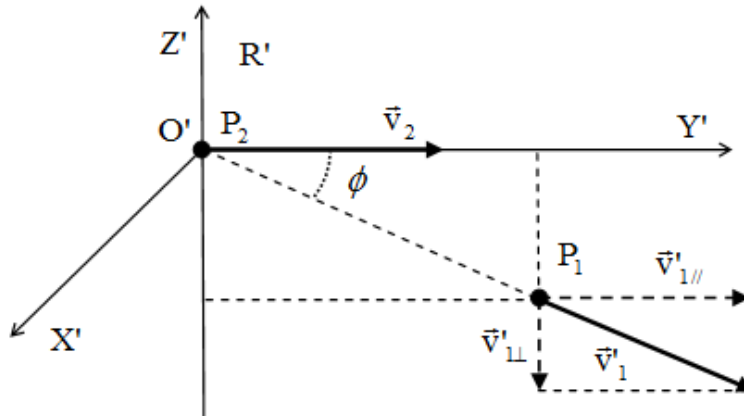


Fig. 6

În desenul din figura 6 este reprezentat sistemul inerțial mobil R' , atașat punctului material P_2 . Ca urmare, situația din enunțul problemei, este echivalentă acum cu situația reprezentată în desenul din figura 6, unde, în originea sistemului inerțial R' , care se deplasează cu viteza \vec{v}_2 , în raport cu sistemul inerțial R , se află în repaus punctul material P_2 .

Identificând:

$$\vec{v}_0 \equiv \vec{v}_1; \vec{v} \equiv \vec{v}_2,$$

a determina viteza relativă relativistă a punctului material P_1 , în raport cu punctul material P_2 , adică $\vec{v}_{12,\text{relativist}}$, înseamnă a determina viteza punctului material P_1 , în raport cu sistemul inerțial mobil, R' , adică:

$$\vec{v}_{12,\text{relativist}} = \vec{v}'_1.$$

Folosind rezultatele anterioare, precum și desenele din figurile 5 și 6, rezultă:

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= \vec{v}_{1//OY} + \vec{v}_{1\perp OY} = \vec{v}_{1//} + \vec{v}_{1\perp}; \\ \vec{v}_{12,\text{relativist}} &= \vec{v}'_1 = \vec{v}'_{1//O'Y'} + \vec{v}'_{1\perp O'Y'} = \vec{v}'_{1//} + \vec{v}'_{1\perp} = \vec{v}_{12}. \end{aligned}$$

0,25

Știind că:

$$\begin{aligned} \vec{v}'_{//} &= \frac{\vec{v}_{//} - \vec{v}_0}{1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}_0}{c^2}}; \quad \vec{v}'_{\perp} = \frac{\vec{v}_{\perp}}{\beta \left(1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}_0}{c^2} \right)}; \quad \vec{v}_0 \equiv \vec{v}_2; \vec{v} \equiv \vec{v}_1; \\ \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} &= \beta; \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}} = \beta, \end{aligned}$$

0,25

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul final va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu ponderea ideilor corecte din rezolvarea elevului.

Barem de evaluare și notare

	<p>rezultă:</p> $\vec{v}'_{1//} = \frac{\vec{v}_{1//} - \vec{v}_2}{1 - \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2}}; \vec{v}'_{1\perp} = \frac{\vec{v}_{1\perp}}{\beta \cdot \left(1 - \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2}\right)}; \vec{v}'_{1\perp} = \frac{\vec{v}_{1\perp}}{\left(1 - \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2}\right)} \cdot \sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}};$ $\vec{v}'_1 = \vec{v}'_{1//} + \vec{v}'_{1\perp} = \vec{v}_{12};$ $\vec{v}'_1 = \vec{v}_{11} = \vec{v}_{12,relativist} = \frac{\vec{v}_{1//} - \vec{v}_2}{1 - \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2}} + \frac{\vec{v}_{1\perp}}{\left(1 - \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2}\right)} \cdot \sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}};$		
	$\left(\vec{v}_{12,relativist}\right)^2 = \frac{(\vec{v}_{1//} - \vec{v}_2)^2}{\left(1 - \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2}\right)^2} + \frac{(\vec{v}_{1\perp})^2}{\left(1 - \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2}\right)^2} \cdot \left(1 - \frac{v_2^2}{c^2}\right);$ $\left(\vec{v}_{12,relativist}\right)^2 = \frac{(\vec{v}_{1//} - \vec{v}_2)^2 + (\vec{v}_{1\perp})^2 \cdot \left(1 - \frac{v_2^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2}\right)^2};$ $\left(\vec{v}_{12,relativist}\right)^2 = \frac{(\vec{v}_{1//}^2 + \vec{v}_2^2 - 2 \cdot \vec{v}_{1//} \cdot \vec{v}_2) + (\vec{v}_{1\perp})^2 \cdot \left(1 - \frac{v_2^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2}\right)^2};$ $\left(\vec{v}_{12,relativist}\right)^2 = \frac{(\vec{v}_{1//}^2 + \vec{v}_2^2 - 2 \cdot \vec{v}_{1//} \cdot \vec{v}_2) + (\vec{v}_{1\perp})^2 \cdot \left(1 - \frac{v_2^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2}\right)^2};$ $\left(\vec{v}_{12,relativist}\right)^2 = \frac{(\vec{v}_{1//}^2 + \vec{v}_2^2 - 2 \cdot \vec{v}_{1//} \cdot \vec{v}_2) + \vec{v}_{1\perp}^2 - \frac{1}{c^2} \cdot (\vec{v}_{1\perp})^2 \cdot \vec{v}_2^2}{\left(1 - \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2}\right)^2};$ $\left(\vec{v}_{12,relativist}\right)^2 = \frac{(\vec{v}_{1//}^2 + \vec{v}_{1\perp}^2 + \vec{v}_2^2 - 2 \cdot \vec{v}_{1//} \cdot \vec{v}_2) - \frac{1}{c^2} \cdot (\vec{v}_{1\perp})^2 \cdot \vec{v}_2^2}{\left(1 - \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2}\right)^2};$	0,25	
	$\vec{v}_1 = \vec{v}_{1//} + \vec{v}_{1\perp};$ $\vec{v}_1^2 = (\vec{v}_{1//} + \vec{v}_{1\perp})^2 = \vec{v}_{1//}^2 + \vec{v}_{1\perp}^2 + 2 \cdot \vec{v}_{1//} \cdot \vec{v}_{1\perp};$ $\vec{v}_1^2 = (\vec{v}_{1//} + \vec{v}_{1\perp})^2 = \vec{v}_{1//}^2 + \vec{v}_{1\perp}^2 + 2 \cdot v_{1//} \cdot v_{1\perp} \cdot \cos 90^\circ = \vec{v}_{1//}^2 + \vec{v}_{1\perp}^2;$	0,50	

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul final va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu ponderea ideilor corecte din rezolvarea elevului.

Barem de evaluare și notare

$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = (\vec{v}_{1//} + \vec{v}_{1\perp}) \cdot \vec{v}_2 = \vec{v}_{1//} \cdot \vec{v}_2 + \vec{v}_{1\perp} \cdot \vec{v}_2 = \vec{v}_{1//} \cdot \vec{v}_2 + v_{1\perp} \cdot v_2 \cdot \cos 90^\circ;$ $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \vec{v}_{1//} \cdot \vec{v}_2;$ $(\vec{v}_{12,relativist})^2 = \frac{(\vec{v}_1^2 + \vec{v}_2^2 - 2 \cdot \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) - \frac{1}{c^2} \cdot (\vec{v}_{1\perp})^2 \cdot \vec{v}_2^2}{\left(1 - \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2}\right)^2};$ $(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 = \vec{v}_1^2 + \vec{v}_2^2 - 2 \cdot \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2;$ $(\vec{v}_{12,relativist})^2 = \frac{(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 - \frac{1}{c^2} \cdot (\vec{v}_{1\perp})^2 \cdot \vec{v}_2^2}{\left(1 - \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2}\right)^2};$ $(\vec{v}_{1\perp})^2 \cdot \vec{v}_2^2 = (\vec{v}_{1\perp} \times \vec{v}_2)^2 = [(\vec{v}_1 - \vec{v}_{1//}) \times \vec{v}_1]^2 = (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)^2 - (\vec{v}_{1//} \times \vec{v}_2)^2;$ $ \vec{v}_{1//} \times \vec{v}_2 = v_{1//} \cdot v_2 \cdot \sin 0^\circ = 0;$ $(\vec{v}_{1\perp})^2 \cdot \vec{v}_2^2 = (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)^2 = (v_1 \cdot v_2 \cdot \sin \alpha)^2;$ $(\vec{v}_{12,relativist})^2 = v_{12,relativist}^2 = \frac{(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 - \frac{1}{c^2} \cdot (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)^2}{\left(1 - \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2}\right)^2};$ $v_{12,relativist} = \frac{\sqrt{(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 - \frac{1}{c^2} \cdot (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)^2}}{1 - \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2}};$ $v_{12,relativist} = \frac{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2 \cdot v_1 \cdot v_2 \cdot \cos \alpha - \frac{v_1^2 \cdot v_2^2 \cdot \sin^2 \alpha}{c^2}}}{1 - \frac{v_1 \cdot v_2 \cdot \cos \alpha}{c^2}},$ <p>reprezentând modulul vitezei relative relativistă a punctului material P₁ în raport cu punctul material P₂;</p>	0,50
$v'_{1//} = \frac{v_{1//} - v_2}{1 - \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2}}; \quad v'_{1\perp} = \frac{v_{1\perp}}{\beta \left(1 - \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2}\right)}; \quad \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}} = \beta;$ $\tan \phi = \frac{v'_{1\perp}}{v'_{1//}} = \frac{v_{1\perp}}{\beta(v_{1//} - v_2)} = \frac{v_1 \sin \alpha}{v_1 \cos \alpha - v_2} \cdot \sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}.$	

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul final va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu ponderea ideilor corecte din rezolvarea elevului.

Barem de evaluare și notare

	$\tan \phi = \frac{v'_{1\perp}}{v'_{1\parallel}} = \frac{v_{1\perp}}{\beta \cdot \left(1 - \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2}\right)} \cdot \frac{1 - \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2}}{v_{1\parallel} - v_2};$ $\tan \phi = \frac{v_{1\perp}}{(v_{1\parallel} - v_2)} \cdot \sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}; \quad \tan \phi = \frac{v_1 \sin \alpha}{v_1 \cos \alpha - v_2} \cdot \sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}},$ <p>unde unghiul ϕ stabilește orientarea vectorului viteză relativă relativă al punctului material P_1 față de punctul material P_2.</p>		
	<p>Am demonstrat că:</p> $v_{21,\text{relativist}} = \frac{\sqrt{(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)^2 - \frac{1}{c^2} \cdot (\vec{v}_2 \times \vec{v}_1)^2}}{1 - \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2}};$ $v_{21,\text{relativist}} = \frac{\sqrt{v_2^2 + v_1^2 - 2 \cdot v_2 \cdot v_1 \cdot \cos \alpha - \frac{v_2^2 \cdot v_1^2 \cdot \sin^2 \alpha}{c^2}}}{1 - \frac{v_1 \cdot v_2 \cdot \cos \alpha}{c^2}};$ $v_{12,\text{relativist}} = \frac{\sqrt{(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 - \frac{1}{c^2} \cdot (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)^2}}{1 - \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2}};$ $v_{12,\text{relativist}} = \frac{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2 \cdot v_1 \cdot v_2 \cdot \cos \alpha - \frac{v_1^2 \cdot v_2^2 \cdot \sin^2 \alpha}{c^2}}}{1 - \frac{v_1 \cdot v_2 \cdot \cos \alpha}{c^2}},$ <p>din care rezultă:</p> $v_{21,\text{relativist}} = v_{12,\text{relativist}} ;$	0,50	
	$\tan \varphi = \frac{v_2 \sin \alpha}{v_2 \cos \alpha - v_1} \cdot \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}; \quad \tan \phi = \frac{v_1 \sin \alpha}{v_1 \cos \alpha - v_2} \cdot \sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}};$ $\phi \neq \varphi,$ <p>astfel încât:</p> $\vec{v}_{21,\text{relativist}} \neq \vec{v}_{12,\text{relativist}} .$	0,50	
c.	<p>Utilizând relația deja obținută, scrisă acum pentru cei doi fotoni, rezultă:</p>	0,50	1

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul final va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu ponderea ideilor corecte din rezolvarea elevului.

Barem de evaluare și notare

	$v_{21,relativist} = \frac{\sqrt{(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)^2 - \frac{1}{c^2} \cdot (\vec{v}_2 \times \vec{v}_1)^2}}{1 - \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2}};$ $(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)^2 = (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \cdot (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 ^2 \cdot \cos 0^0 = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 ^2;$ $(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)^2 = v_2^2 + v_1^2 - 2v_2v_1 \cos \alpha;$ $v_1 = v_2 = c; (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)^2 = 2c^2(1 - \cos \alpha);$ $(\vec{v}_2 \times \vec{v}_1)^2 = \vec{v}_2 \times \vec{v}_1 ^2 = (v_2v_1 \sin \alpha)^2;$ $v_1 = v_2 = c; (\vec{v}_2 \times \vec{v}_1)^2 = c^4 \sin^2 \alpha;$ $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = v_1v_2 \cos \alpha; v_1 = v_2 = c; \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = c^2 \cos \alpha;$ $v_{21,relativist} = \frac{\sqrt{2c^2(1 - \cos \alpha) - \frac{1}{c^2} c^4 \sin^2 \alpha}}{1 - \frac{c^2 \cos \alpha}{c^2}};$		
	$v_{21,relativist} = \frac{\sqrt{2c^2(1 - \cos \alpha) - c^2 \sin^2 \alpha}}{1 - \cos \alpha};$ $v_{21,relativist} = \frac{\sqrt{c^2 + c^2 - 2c^2 \cos \alpha - c^2 \sin^2 \alpha}}{1 - \cos \alpha};$ $v_{21,relativist} = \frac{\sqrt{c^2 + c^2(1 - \sin^2 \alpha) - 2c^2 \cos \alpha}}{1 - \cos \alpha};$ $v_{21,relativist} = \frac{\sqrt{c^2 + c^2 \cos^2 \alpha - 2c^2 \cos \alpha}}{1 - \cos \alpha};$ $v_{21,relativist} = c \cdot \frac{\sqrt{1 + \cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha}}{1 - \cos \alpha};$ $v_{21,relativist} = c \cdot \frac{\sqrt{(1 - \cos \alpha)^2}}{1 - \cos \alpha};$ $v_{21,relativist} = c,$ <p>rezultat în acord cu principiul constanței vitezei luminii, în raport cu orice sistem de referință inerțial.</p>	0,50	
d.	$v_{\text{miion}, \mu^+} = v_1 = v < c; v_{\text{neutrino}, \nu} = v_2 = c;$ $v_{21,relativist} = \frac{\sqrt{v^2 + c^2 - 2vc \cos \alpha - \frac{v^2 c^2 \sin^2 \alpha}{c^2}}}{1 - \frac{vc \cos \alpha}{c^2}};$	0, 50	1,5

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul final va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu ponderea ideilor corecte din rezolvarea elevului.



Barem de evaluare și notare

	$v_{21,relativist} = \frac{\sqrt{v^2 + c^2 - 2 \cdot v \cdot c \cdot \cos \alpha - v^2 \cdot \sin^2 \alpha}}{1 - \frac{v \cdot \cos \alpha}{c}};$ $v_{21,relativist} = \frac{\sqrt{v^2 \cdot (1 - \sin^2 \alpha) + c^2 - 2 \cdot v \cdot c \cdot \cos \alpha}}{1 - \frac{v \cdot \cos \alpha}{c}};$ $v_{21,relativist} = \frac{\sqrt{v^2 \cdot \cos^2 \alpha + c^2 - 2 \cdot v \cdot c \cdot \cos \alpha}}{c - v \cdot \cos \alpha};$			0,50
	$v_{21,relativist} = \frac{\sqrt{(c - v \cdot \cos \alpha)^2}}{c - v \cdot \cos \alpha}; v_{21,relativist} = c,$			0,50
	rezultat în acord cu invarianța vitezei luminii în raport cu orice SRI.			
e.	<p>Am demonstrat că:</p> $v_{21,relativist} = \frac{\sqrt{(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)^2 - \frac{1}{c^2} (\vec{v}_2 \times \vec{v}_1)^2}}{1 - \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2}};$ $v_{21,relativist} = \frac{\sqrt{\vec{v}_2^2 + \vec{v}_1^2 - 2 \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1 - \frac{v_2^2 v_1^2 \sin^2 \alpha}{c^2}}}{1 - \frac{v_1 v_2 \cos \alpha}{c^2}};$ $v_{21,relativist} = \frac{\sqrt{v_2^2 + v_1^2 - 2 v_2 v_1 \cos \alpha - \frac{v_2^2 v_1^2 \sin^2 \alpha}{c^2}}}{1 - \frac{v_1 v_2 \cos \alpha}{c^2}},$			0,50
	astfel încât, rezultă:			
	$v_1 = v_2 = \frac{c}{2}; \alpha = 60^\circ;$			
	$v_{21,relativist} = \frac{\sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{c^2}{4} - 2 \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{c}{2} \cdot \cos 60^\circ - \frac{\frac{c^2}{4} \cdot \frac{c^2}{4} \sin^2 60^\circ}{c^2}}}{1 - \frac{\frac{c}{2} \cdot \frac{c}{2} \cdot \cos 60^\circ}{c^2}};$			0,50

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul final va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu ponderea ideilor corecte din rezolvarea elevului.



Barem de evaluare și notare

$v_{21,relativist} = \frac{\sqrt{\frac{c^2}{2} - \frac{c^2}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{c^4}{16} \cdot \frac{3}{4}}}{1 - \frac{c^2}{4} \cdot \frac{1}{2}}; v_{21,relativist} = \frac{\sqrt{\frac{c^2}{2} - \frac{c^2}{4} - \frac{3 \cdot c^2}{4 \cdot 16}}}{1 - \frac{1}{8}};$	
$v_{21,relativist} = c \cdot \frac{\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{3}{4 \cdot 16}}}{1 - \frac{1}{8}}; v_{21,relativist} = c \cdot \frac{\sqrt{\frac{2 \cdot 16 - 16 - 3}{4 \cdot 16}}}{\frac{7}{8}};$	
$v_{21,relativist} = c \cdot \frac{\sqrt{\frac{16-3}{4 \cdot 16}}}{\frac{7}{8}} = c \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{\sqrt{13}}{2 \cdot 4}; v_{21,relativist} = \frac{\sqrt{13}}{7} c.$	0,50

Barem propus de:

prof. dr. Luciu ALEXANDRESCU – Colegiul Național „Dr. Ioan Meșotă” Brașov

prof. dr. Gabriel FLORIAN – Colegiul Național „Carol I” Craiova

prof. dr. Mihail SANDU – Liceul Tehnologic de Turism Călimănești

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul final va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu ponderea ideilor corecte din rezolvarea elevului.