

Sâmbătă, 15 aprilie 2023

**Problema 1.** Considerăm  $n \geq 3$  numere reale strict pozitive  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Pentru fiecare  $i$ , cu  $1 \leq i \leq n$ , fie  $b_i = \frac{a_{i-1} + a_{i+1}}{a_i}$  (unde  $a_0 = a_n$  și  $a_{n+1} = a_1$ ). Presupunem că, pentru orice  $i$  și  $j$  de la 1 la  $n$ , avem  $a_i \leq a_j$  dacă și numai dacă  $b_i \leq b_j$ .

Arătați că  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ .

**Problema 2.** Considerăm un triunghi ascuțitunghic  $ABC$ . Fie  $D$  punctul diametral opus lui  $A$  pe cercul circumscris triunghiului. Presupunem că punctele  $K$  și  $L$  sunt situate pe segmentele  $AB$ , respectiv  $AC$  așa încât  $DK$  și  $DL$  sunt tangente la cercul  $AKL$ .

Arătați că dreapta  $KL$  trece prin ortocentrul triunghiului  $ABC$ .

*Ortocentrul unui triunghi este punctul de intersecție a înălțimilor sale.*

**Problema 3.** Fie  $k$  un număr natural nenul. Lexi are un dicționar  $\mathcal{D}$  alcătuit din câteva șiruri de câte  $k$  litere, conținând doar literele  $A$  și  $B$ . Lexi dorește să scrie, în fiecare căsuță a unui tabel  $k \times k$ , fie litera  $A$ , fie litera  $B$ , astfel încât fiecare coloană, citită de sus în jos, și fiecare linie, citită de la stânga la dreapta, să fie un șir din  $\mathcal{D}$ .

Care este cel mai mic număr întreg  $m$  cu proprietatea: dacă  $\mathcal{D}$  conține cel puțin  $m$  șiruri diferite, atunci Lexi poate să își completeze tabelul ca mai sus, oricum am alege cuvintele din  $\mathcal{D}$ ?