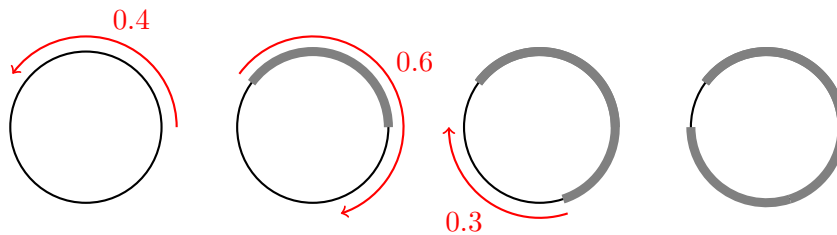


Duminică, 16 aprilie 2023

**Problema 4.** Melcul Turbo stă într-un punct al unui cerc de lungime 1. Dându-se un șir infinit  $c_1, c_2, c_3, \dots$  de numere reale strict pozitive, Turbo se târăște, rând pe rând, pe distanțele  $c_1, c_2, c_3, \dots$  de-a lungul cercului alegând, de fiecare dată, dacă se târăște în sensul mișcării acelor ceasornicului sau invers.

De exemplu, dacă șirul  $c_1, c_2, c_3, \dots$  este  $0.4, 0.6, 0.3, \dots$ , atunci Turbo poate să înceapă să se târască după cum urmează:



Determinați cea mai mare constantă  $C > 0$  cu proprietatea: pentru fiecare șir de numere reale strict pozitive  $c_1, c_2, c_3, \dots$ , cu  $c_i < C$  pentru orice  $i$ , Turbo poate (după ce analizează șirul) să se asigure că există un punct al cercului pe care nu îl vizitează și nici nu trece peste el niciodată.

**Problema 5.** Fie numărul natural  $s \geq 2$ . Pentru orice număr natural nenul  $k$  definim *răsucitul* său  $k'$  astfel: scriem  $k$  în forma  $as + b$ , unde  $a$  și  $b$  sunt numere naturale, cu  $b < s$ , iar  $k' = bs + a$ . Pentru numărul natural nenul  $n$  considerăm șirul  $d_1, d_2, \dots$ , unde  $d_1 = n$  și  $d_{i+1}$  este răsucitul lui  $d_i$ , pentru orice număr natural nenul  $i$ .

Demonstrați că acest șir îl conține pe 1 dacă și numai dacă restul împărțirii lui  $n$  la  $s^2 - 1$  este fie 1, fie  $s$ .

**Problema 6.** Fie  $ABC$  un triunghi având cercul circumscris  $\Omega$ . Fie  $S_b$  și  $S_c$  mijloacele arcelor  $AC$ , respectiv  $AB$ , care nu conțin al treilea vârf. Fie  $N_a$  mijlocul arcului  $BAC$  (arcul  $BC$  care-l conține pe  $A$ ). Fie  $I$  centrul cercului înscris în triunghiul  $ABC$ . Fie  $\omega_b$  cercul tangent la  $AB$  și tangent interior la  $\Omega$  în  $S_b$ , și fie  $\omega_c$  cercul tangent la  $AC$  și tangent interior la  $\Omega$  în  $S_c$ . Arătați că dreapta  $IN_a$  și dreapta care trece prin punctele de intersecție ale cercurilor  $\omega_b$  și  $\omega_c$  se taie într-un punct de pe  $\Omega$ .

*Centrul cercului înscris într-un triunghi este centrul cercului care este situat în interiorul triunghiului și este tangent la toate laturile sale.*