Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

I. FELADATSOR (30 pont)

5p **1.** Adott a $z=3+i$ komplex szám. Igazolja, hogy $z(z-2i)=10$.

5p **2.** Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=5x+1$ függvény. Igazolja, hogy $f(2x)-2f(x)=-1$, bármely x valós szám esetén!

5p **3.** Oldja meg a valós számok halmazán a $\sqrt[3]{x^3-2x+2}=x$ egyenletet!

5p **4.** Jelöljük A-val a kétjegyű természetes számok halmazát. Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy az A halmazból véletlenszerűen kiválasztott n szám esetén az $n+5$ a 10-nek többszöröse legyen!

5p **5.** Az xOy derékszögű koordináta-rendszerben adottak az $A(4,0)$ és $B(5,4)$ pontok. Határozza meg annak a d egyenesnek az egyenletét, amely átmegy az O ponton és párhuzamos az AB egyenessel!

5p **6.** Adott az ABC, A-ban derékszögű, egyenlő szárú háromszög, amelynek területe 4. Igazolja, hogy $BC=4$.

II. FELADATSOR (30 pont)

1. Adott az $A(a)=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 1 & -1 & a\\ a & a+1 & -2\end{pmatrix}$ mátrix és a $\begin{cases}2x+y+2z=2\\ x-y+az=4\\ ax+(a+1)y-2z=a\end{cases}$ egyenletrendszer, ahol a valós szám.

5p **a)** Igazolja, hogy $\det(A(0))=8$.

5p **b)** Határozza meg azoknak az a valós számoknak a halmazát, amelyekre az $A(a)$ mátrix invertálható!

5p **c)** $a=-2$ esetén igazolja, hogy $x_0z_0+y_0=-2$, az egyenletrendszer bármely (x_0,y_0,z_0) megoldása esetén!

2. A valós számok halmazán értelmezzük az $x\circ y=xy+(2^x-2)(2^y-2)$ műveletet.

5p **a)** Igazolja, hogy $2\circ 3=18$.

5p **b)** Igazolja, hogy $e=1$ a „$\circ$” művelet semleges eleme!

5p **c)** Bizonyítsa be, hogy $x\circ(-x)\le 1$, bármely x valós szám esetén!

III. FELADATSOR (30 pont)

1. Adott az $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+3\ln\frac{x+3}{x-1}$ függvény.

5p **a)** Igazolja, hogy $f'(x)=\frac{x^2+2x-15}{(x-1)(x+3)}$, $x\in(1,+\infty)$.

5p **b)** Határozza meg az f függvény grafikus képe ferde aszimptotájának egyenletét a $+\infty$ felé!

5p **c)** Bizonyítsa be, hogy $\ln\frac{x+3}{3(x-1)}\ge 1-\frac{x}{3}$, bármely $x\in(1,+\infty)$ esetén!

2. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x^2+2x)e^{-x}$ függvény.

5p **a)** Igazolja, hogy $\int_0^3 f(x)e^x\,dx=18$.

5p	**b)** Igazolja, hogy $\int_0^1 \frac{f(x)}{x+2}dx = \frac{e-2}{e}$.
5p	**c)** Bizonyítsa be, hogy $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\int_0^x f(t)\,dt\right) = 1$.