sâmbătă, 8. iulie 2023

Problema 1. Determinați toate numerele naturale compuse $n > 1$ care satisfac următoarea proprietate: dacă $d_1, d_2, \ldots, d_k$ sunt toți divizorii pozitivi ai numărului n cu $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$, atunci d_i divide $d_{i+1} + d_{i+2}$ pentru orice $1 \leqslant i \leqslant k-2$.

Problema 2. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic cu $AB < AC$. Fie Ω cercul circumscris triunghiului ABC. Fie S mijlocul arcului CB al cercului Ω care conține punctul A. Perpendiculara din A pe dreapta BC intersectează dreapta BS în punctul D și intersectează din nou cercul Ω în punctul $E \neq A$. Paralela dusă prin D la dreapta BC intersectează dreapta BE în punctul L. Notăm cu ω cercul circumscris triunghiului BDL. Cercul ω intersectează din nou cercul Ω în punctul $P \neq B$.
Demonstrați că punctul de intersecție dintre dreapta tangentă la cercul ω în punctul P și dreapta BS se află pe bisectoarea interioară a unghiului $\angle BAC$.

Problema 3. Pentru fiecare număr natural $k \geqslant 2$, determinați toate șirurile infinite de numere naturale nenule $a_1, a_2, \ldots$ pentru care există un polinom P de forma

$$P(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \cdots + c_1 x + c_0,$$

unde $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$ sunt numere naturale, astfel încât

$$P(a_n) = a_{n+1}a_{n+2}\cdots a_{n+k}$$

pentru orice număr natural $n \geqslant 1$.

Timp de lucru: 4 ore și 30 de minute.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

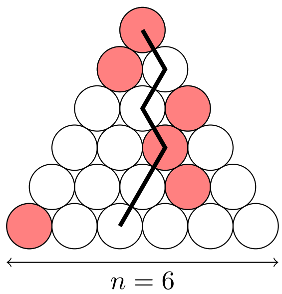
duminică, 9. iulie 2023

Problema 4. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_{2023}$ numere reale strict pozitive, diferite două câte două, astfel încât

$$a_n = \sqrt{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)}$$

este număr întreg pentru orice $n = 1, 2, \ldots, 2023$. Demonstrați că $a_{2023} \geqslant 3034$.

Problema 5. Fie n un număr natural nenul. Un *trunghi japonez* este format din $1 + 2 + \cdots + n$ cercuri aranjate în formă de triunghi echilateral astfel încât, pentru orice $i = 1, 2, \ldots, n$, rândul i conține exact i cercuri, dintre care exact unul este colorat cu roșu. Se numește *drum ninja* într-un triunghi japonez o secvență de n cercuri obținută începând din rândul cel mai de sus, apoi trecând în mod repetat de la un cerc la unul dintre cele două cercuri aflate imediat sub el, și terminând în rândul cel mai de jos. Iată un exemplu de triunghi japonez cu $n = 6$, cu un drum ninja în acest triunghi care conține două cercuri roșii.



Găsiți cel mai mare număr k, în funcție de n, astfel încât în orice triunghi japonez există un drum ninja care conține cel puțin k cercuri roșii.

Problema 6. Fie ABC un triunghi echilateral. Fie A_1, B_1, C_1 trei puncte interioare triunghiului ABC astfel încât $BA_1 = A_1C$, $CB_1 = B_1A$, $AC_1 = C_1B$, și

$$\angle BA_1C + \angle CB_1A + \angle AC_1B = 480°.$$

Dreptele BC_1 și CB_1 se intersectează în punctul A_2, dreptele CA_1 și AC_1 se intersectează în punctul B_2, iar dreptele AB_1 și BA_1 se intersectează în punctul C_2.
Demonstrați că dacă triunghiul $A_1B_1C_1$ este scalen, atunci cele trei cercuri circumscrise triunghiurilor AA_1A_2, BB_1B_2 și CC_1C_2 trec toate prin două puncte comune.

(Notă: un triunghi scalen este unul în care nu există două laturi egale.)

Timp de lucru: 4 ore și 30 de minute.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.