

CONCURSUL NAȚIONAL DE OCUPARE A POSTURILOR DIDACTICE/CATEDRELOR
VACANTE/REZERVATE DIN ÎNVĂȚĂMÂNTUL PREUNIVERSITAR

12 iulie 2023

Probă scrisă
MATEMATICĂ

Varianta 3

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de patru ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + mx - 2$, unde m este număr real.
- 5p a) Arătați că ecuația $f(x) = 0$ are două soluții reale distincte, pentru orice număr real m .
- 5p b) Pentru $m = 2$, parabola asociată funcției f are vârful V și intersectează axa Ox în punctele A și B . Arătați că triunghiul VAB este echilateral.
- 5p c) Arătați că, pentru orice număr real m , mulțimea $f^{-1}(\{x_1, x_2\})$ are 4 elemente, unde x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $f(x) = 0$ și $f^{-1}(A) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in A\}$, $A \subset \mathbb{R}$.
2. Se consideră triunghiul ABC , cu $AB < BC$, punctele D și E sunt mijloacele segmentelor AB , respectiv AC , iar M este un punct situat pe segmentul DE , diferit de punctele D și E . Punctele N și P sunt simetricile lui M față de punctele D și respectiv E , iar Q este punctul de intersecție a dreptelor BM și CP și T este punctul de intersecție a dreptelor CM și BN .
- 5p a) Arătați că dreptele BN și CP sunt paralele.
- 5p b) Demonstrați că $AM^2 = PQ \cdot NT$.
- 5p c) Arătați că, dacă semidreapta BM este bisectoarea unghiului ABC , atunci $2EQ = BC - AB$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = xy + |xy| - |x| - |y| + 1$.
- 5p a) Arătați că $e = 1$ este elementul neutru al legii de compoziție „*”.
- 5p b) Arătați că $x * y \in [0, 1]$, pentru orice $x, y \in [0, 1]$.
- 5p c) Se consideră mulțimea $A = \{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid a * x = a, \text{ pentru orice } x \in [b, +\infty)\}$. Determinați valoarea minimă a lui $a + b$, unde $(a, b) \in A$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \sqrt{4x^2 + 1}$.
- 5p a) Arătați că funcția f este concavă.
- 5p b) Demonstrați că $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n - \left(f'\left(\frac{1}{n^2}\right) + f'\left(\frac{2}{n^2}\right) + f'\left(\frac{3}{n^2}\right) + \dots + f'\left(\frac{n}{n^2}\right) \right) \right) = 2$.
- 5p c) Demonstrați că $\int_{\frac{2}{3}}^{\sqrt{2}} \frac{x - f(x)}{x^3} dx = \frac{9}{8} + \ln 2$.

Următoarea secvență face parte din programa școlară de matematică pentru clasa a VIII-a.

Competențe specifice și exemple de activități de învățare

Clasa a VIII-a
<p>1.4. Identificarea unor figuri plane sau a unor elemente caracteristice acestora în configurații spațiale date</p> <ul style="list-style-type: none">- Identificarea, construcția, notarea și citirea unor drepte concurente/paralele/necoplanare în configurații spațiale, cu exemplificare și în realitatea înconjurătoare- Identificarea, în configurații spațiale simple și în realitate, a pozițiilor relative ale unei drepte față de un plan- Identificarea pozițiilor relative a două plane în configurații spațiale simple și în realitatea înconjurătoare- Recunoașterea figurilor geometrice obținute în urma secționării unei piramide sau a unei prisme cu un plan paralel cu baza
<p>2.4. Reprezentarea, prin desen sau prin modele, a unor configurații spațiale date</p> <ul style="list-style-type: none">- Reprezentarea prin desen sau prin modele a unor configurații spațiale în/din contexte reale- Utilizarea instrumentelor geometrice și a softurilor matematice pentru a desena diferite configurații spațiale- Utilizarea diferitelor mijloace didactice pentru a modela rezultate asociate relațiilor de paralelism și perpendicularitate în spațiu- Utilizarea convențiilor de notare și citire a configurațiilor spațiale- Reprezentarea, prin desen, a proiecțiilor și a unghiurilor- Clasificarea prismelor/piramidelor după forma bazei- Construirea înălțimii unei prisme sau a unei piramide
<p>3.4. Folosirea unor proprietăți de paralelism sau perpendicularitate pentru analiza pozițiilor relative ale dreptelor și planelor</p> <ul style="list-style-type: none">- Utilizarea măsurilor unghiurilor și a distanțelor pentru stabilirea pozițiilor relative între drepte și/sau plane- Determinarea paralelismului în spațiu, între drepte și/sau plane cu ajutorul proprietăților relațiilor de paralelism și de perpendicularitate în configurații simple- Determinarea perpendicularității în spațiu, între drepte și/sau plane cu ajutorul proprietăților relațiilor de paralelism și de perpendicularitate în configurații simple
<p>4.4. Descrierea în limbaj matematic a elementelor unei configurații geometrice</p> <ul style="list-style-type: none">- Construirea unor configurații geometrice cu drepte și plane aflate în relații de paralelism sau perpendicularitate- Verificarea validității unor afirmații legate de pozițiile relative ale dreptelor și/sau ale planelor prin exemple și contraexemplu- Identificarea și utilizarea axiomelor, teoremelor directe/reciproce pentru rezolvarea de probleme în configurații spațiale simple- Evidențierea unor aspecte particulare sau a unor aspecte ce pot fi generalizate, referitoare la configurații spațiale
<p>5.4. Alegerea reprezentărilor geometrice adecvate în vederea descrierii unor configurații spațiale și a calculării unor elemente metrice</p> <ul style="list-style-type: none">- Argumentarea demersului de rezolvare a unei probleme de geometrie în spațiu- Adecvarea reprezentărilor configurațiilor spațiale la cerințele problemelor, în vederea optimizării rezolvării problemei- Optimizarea rezolvării de probleme prin utilizarea instrumentelor interactive de realizare a reprezentărilor geometrice (softuri matematice)- Analizarea/interpretarea unor situații din realitatea înconjurătoare și transpunerea lor în probleme de geometrie în spațiu

6.4. Modelarea unor situații practice în limbaj geometric, utilizând configurații spațiale

- Formularea de ipoteze și de concluzii în probleme cu conținut practic legate de proiecții pe plan a unor puncte, drepte, segmente
- Verificarea validității unor rezultate, în cazul înlocuirii unor părți din ipoteză cu părți din concluzie
- Transpunerea unor situații date în limbajul specific geometriei, interpretarea rezultatelor obținute și corelarea răspunsului geometric cu restricțiile impuse de realitatea înconjurătoare

[...]

Domeniu de conținut	Conținuturi
Geometrie	<p>4. ELEMENTE ALE GEOMETRIEI ÎN SPAȚIU</p> <ul style="list-style-type: none">• Puncte, drepte, plane: convenții de notare, reprezentări, determinarea dreptei, determinarea planului, relații între puncte, drepte și plane• Corpuri geometrice: piramida, piramida regulată, tetraedrul regulat; prismă dreaptă, paralelipiped dreptunghic, cub; cilindru circular drept; con circular drept; reprezentare, elemente caracteristice, desfășurări• Paralelism: drepte paralele, unghiul a două drepte, dreaptă paralelă cu un plan, plane paralele, aplicații: secțiuni paralele cu baza în corpurile geometrice studiate; trunchiul de piramidă și trunchiul de con circular drept (descriere și reprezentare)• Perpendicularitate: drepte perpendiculare, dreaptă perpendiculară pe un plan, aplicații: înălțimea unei piramide, înălțimea unui con circular drept, distanța dintre două plane paralele, înălțimea prisme drepte, a paralelipipedului dreptunghic, a cilindrului circular drept, a trunchiului de piramidă/con circular drept; plane perpendiculare, aplicații: secțiuni diagonale, secțiuni axiale în corpurile studiate• Proiecții de puncte, de segmente și de drepte pe un plan; unghiul dintre o dreaptă și un plan, aplicație: lungimea proiecției unui segment; unghi diedru, unghi plan corespunzător diedrului; unghiul a două plane; plane perpendiculare• Teorema celor trei perpendiculare; calculul distanței de la un punct la o dreaptă; calculul distanței de la un punct la un plan; calculul distanței dintre două plane paralele

Notă: Conținuturile vor fi abordate din perspectiva competențelor specifice. Activitățile de învățare sugerate oferă o imagine posibilă privind contextele de formare/dezvoltare a acestor competențe.

(Programa școlară pentru disciplina Matematică, OMEN nr. 3393/28.02.2017)

Folosind informațiile din secvența de mai sus, în vederea evaluării formării/dezvoltării competențelor specifice precizate, elaborați o probă de evaluare la finalul unității de învățare „**Elemente ale geometriei în spațiu. Perpendicularitate**”, care să cuprindă cinci itemi: *un item de completare, un item cu răspuns scurt, un item de tip alegere multiplă, un item de tip întrebare structurată și un item de tip rezolvare de probleme.*

Pentru fiecare item propus:

- menționați competența specifică evaluată;
- menționați activitatea de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat;
- precizați un avantaj al utilizării acestui tip de item;
- precizați un dezavantaj al utilizării acestui tip de item;
- respectați formatul tipului de item;
- respectați corectitudinea științifică, inclusiv a răspunsului așteptat.