

2023
—
2024

REPERE METODOLOGICE
PENTRU APLICAREA
CURRICULUMULUI
ÎN ANUL ȘCOLAR 2023–2024



DISCIPLINA MATEMATICĂ
CLASA a XI-a

ADRESABILITATE

- I
învățământ liceal:
filiera teoretică, profil real
filiera vocațională, profil militar
- II
învățământ liceal:
filiera tehnologică
învățământ profesional
- III
învățământ liceal:
filiera teoretică, profil umanist
filiera vocațională





**MINISTERUL
EDUCAȚIEI**

**CENTRUL NAȚIONAL DE POLITICI
ȘI EVALUARE ÎN EDUCAȚIE**



REPERE METODOLOGICE

**pentru aplicarea curriculumului
la clasa a XI-a**

în anul școlar 2023-2024

DISCIPLINA MATEMATICĂ

Filiera teoretică, profilul real, specializările matematică-informatică și științe ale naturii

Filiera vocațională, profilul militar (MApN), specializarea matematică-informatică

**BUCUREȘTI
SEPTEMBRIE 2023**



Cuprins

Secțiunea I – Premise pentru aplicarea curriculumului la clasa a XI-a în anul școlar 2023-2024, învățământ liceal, filiera teoretică, profilul real și filiera vocațională, profilul militar MApN

I.1 Recomandări generale privind specificul clasei a XI-a la disciplina matematică.....	2
I.2 Recomandări specifice învățământului liceal, filiera teoretică, profilul real și filiera vocațională, profilul militar MApN	6
I.3 Perspectiva examenului național de bacalaureat	8

Secțiunea a II-a – Orientarea procesului educativ la disciplina matematică

II.1. Exemple de planificări calendaristice pentru clasa a XI-a, la disciplina matematică, învățământ liceal, filiera teoretică, profilul real și filiera vocațională, profilul militar MApN	11
II.1.1 Exemplu de planificare calendaristică pentru clasa a XI-a, la disciplina matematică, programa M1 (matematică-informatică)	11
II.1.2 Exemplu de planificare calendaristică pentru clasa a XI-a, la disciplina matematică, programa M2 (științe ale naturii).....	17
II.2 Exemple de platforme/aplicații care sprijină elaborarea și administrarea de instrumente de evaluare.....	21

Secțiunea a III-a – Predare-învățare-evaluare. Recomandări și exemplificări la disciplina matematică, clasa a XI-a

III.1. Elemente de proiectare didactică.....	22
III.1.1 Elemente de proiectare didactică – exemplificare pentru unitatea de învățare <i>Matrice</i> , clasa a XI-a, programa școlară pentru matematică M1 (matematică-informatică), 4 ore/săptămână.....	22
III.1.2 Elemente de proiectare didactică – exemplificare pentru unitatea de învățare <i>Rolul derivatelor de ordinul I și al II-lea în studiul funcțiilor</i> , clasa a XI-a, programa școlară pentru matematică M2 (științe ale naturii), 3 ore/săptămână	41
III.2 Exemplificarea de strategii de învățare interactivă și de evaluare bazată pe noile tehnologii.....	78
III.2.1.1 Strategii de învățare interactivă bazate pe noile tehnologii pentru <i>Elemente de analiză matematică și pentru Elemente de calcul matriceal și sisteme de ecuații liniare</i>	78
III.2.1.2 Strategii de evaluare bazate pe noile tehnologii în <i>Elementele de analiză matematică și în Elementele de calcul matriceal și sisteme de ecuații liniare</i>	79
III.2.2 Exemplificări de evaluări inițiale pentru clasa a XI-a	81
III.2.2.1 Exemplu de evaluare inițială, clasa a XI-a – profilul real, specializarea matematică-informatică și filiera vocațională, profilul militar MApN	82
III.2.2.2 Exemplu de evaluare inițială clasa a XI-a – profilul real, specializarea științe ale naturii	86
Colectivul de autori	90



SECȚIUNEA I

**Premise pentru aplicarea curriculumului la clasa a XI-a
în anul școlar 2023-2024, învățământ liceal, filiera teoretică,
profilul real și filiera vocațională, profilul militar MApN**

**Material elaborat la nivelul Centrului Național de Politici și Evaluare
în Educație și în cadrul GLC 39 Matematică**



I.1 Recomandări generale privind specificul clasei a XI-a la disciplina matematică

Generația de elevi care va fi în clasa a XI-a, în anul școlar 2023-2024 este cea care a absolvit clasa a VIII-a la finalul anului școlar 2020-2021, fiind prima generație de elevi care a beneficiat de un nou curriculum național pentru învățământul primar (elaborat în anul 2013) și pentru învățământul gimnazial (elaborat în 2017) și care a susținut examenul de evaluare națională pentru absolvenții clasei a VIII-a cu o nouă structură a subiectelor la matematică. Materialul *Repere metodologice pentru aplicarea curriculumului la clasa a XI-a, în anul școlar 2023-2024* continuă demersurile de compatibilizare și integrare – realizate anterior prin documentele *Repere metodologice pentru aplicarea curriculumului la clasa a IX-a, în anul școlar 2021-2022* și *Repere metodologice pentru aplicarea curriculumului la clasa a X-a, în anul școlar 2022-2023* – a viziunii programelor școlare la disciplina matematică pentru clasele a V-a – a VIII-a cu cea a programelor școlare în vigoare pentru învățământul liceal, susținând procesele de reevaluare și structurare a predării-învățării-evaluării la matematică în contextul orientării demersurilor educaționale pe formarea de competențe, ca element central al programelor școlare și al centrării pe elev, cu accent pe rezultatele învățării.

O parte dintre aspectele privind cadrul general de derulare a procesului didactic la matematică, prezentate în materialele menționate, sunt de actualitate și pentru aplicarea curriculumului la clasa a XI-a, în anul școlar 2023-2024, ca urmare se regăsesc succint și în prezentul material.

- Disciplina matematică vizează în primul rând competența cheie *Competențe în domeniul științei, tehnologiei, ingineriei și matematicii* (RECOMANDAREA CONSILIULUI din 22 mai 2018 privind competențele-cheie pentru învățarea pe tot parcursul vieții, [https://eur-lex.europa.eu/legal-content/RO/TXT/PDF/?uri=CELEX:32018H0604\(01\)](https://eur-lex.europa.eu/legal-content/RO/TXT/PDF/?uri=CELEX:32018H0604(01)))
- Competențele în domeniul matematicii sunt definite drept capacitatea de a dezvolta și de a folosi gândirea și raționamentul matematic pentru a rezolva o serie de probleme în situații de zi cu zi. Se pune accent atât pe procese și activități, cât și pe cunoștințe. Competențele matematice implică, la niveluri diferite, capacitatea și disponibilitatea de a utiliza moduri matematice de gândire și de prezentare (formule, modele, grafice, diagrame).
- Cunoștințe, deprinderi și atitudini esențiale legate de această competență:
 - a) cunoștințele necesare în domeniul matematicii includ cunoștințe temeinice privind numerele, măsurile și structurile, operațiunile de bază și prezentările matematice de bază, o înțelegere a termenilor și a conceptelor matematice, precum și o sensibilizare față de întrebările la care matematica poate oferi răspunsuri;
 - b) elevii ar trebui să-și formeze deprinderi de a aplica principiile și procesele matematice de bază în contexte de zi cu zi, acasă și la muncă (de exemplu, deprinderi financiare), și să urmărească și să evalueze înșiruirii de argumente; elevii ar trebui să fie în măsură să utilizeze raționamentul matematic, să înțeleagă dovezile matematice, să comunice în limbaj matematic și să utilizeze instrumente ajutătoare corespunzătoare, inclusiv date statistice și grafice, precum și să înțeleagă aspectele matematice ale digitalizării;
 - c) o atitudine pozitivă în matematică se bazează pe respectarea adevărului și pe dorința de a căuta raționamente și de a verifica valabilitatea acestora. (sursa: RECOMANDAREA

SECȚIUNEA I Premise pentru aplicarea curriculumului la clasa a XI-a în anul școlar 2023-2024, învățământ liceal, filiera teoretică, profilul real și filiera vocațională, profilul militar MApN

CONSILIULUI din 22 mai 2018 privind competențele-cheie pentru învățarea pe tot parcursul vieții, [https://eur-lex.europa.eu/legal-content/RO/TXT/PDF/?uri=CELEX:32018H0604\(01\)\)](https://eur-lex.europa.eu/legal-content/RO/TXT/PDF/?uri=CELEX:32018H0604(01)))

COMPETENȚA-CHEIE	Nivel elementar	Nivel funcțional	Nivel dezvoltat
Competențe în domeniul științei, tehnologiei, ingineriei și matematicii	Utilizarea limbajului matematic și a unui aparat matematic de bază (numere, operații, reguli elementare) pentru rezolvarea de probleme	Utilizarea unui limbaj <i>corect</i> și a unui aparat matematic <i>diversificat</i> (inclusiv demonstrații și raționamente matematice) pentru identificarea de probleme, stabilirea demersului de rezolvare și prezentarea rezultatelor	Utilizarea unor moduri de gândire și forme de prezentare <i>specifice</i> matematicii (de exemplu, formule, modele, constructe, grafice), inclusiv în relație cu întrebări <i>relevante</i> pentru viața reală
	Utilizarea unor noțiuni, operații și raționamente matematice elementare pentru rezolvarea unor probleme simple, raportate la universul familiar	Valorificarea conceptelor, a cunoștințelor procedurale și a raționamentelor matematice, în rezolvarea de probleme raportate la contexte cotidiene date	Construirea demersului de rezolvare a problemelor identificate într-o varietate de contexte, prin aplicarea principiilor și proceselor matematice
	Manifestarea curiozității pentru aflarea adevărului, realizând distincția corect/incorect pe baza unui set de criterii simple	Manifestarea interesului pentru identificarea soluțiilor unor probleme argumentând demersul matematic utilizat	Preocuparea constantă pentru evaluarea validității unor raționamente matematice aplicate în contexte diverse
	Observarea unor aspecte din mediul apropiat în scopul rezolvării intuitive a unor probleme și al formulării unor predicții în situații simple de viață	Efectuarea unor experimente controlate în scopul explicării unor fenomene, prin aplicarea unor metode specifice științelor	Manifestarea gândirii științifice prin cercetarea unor situații/probleme specifice științelor naturii și prin raportarea propriilor convingeri la rezultatele experimentale validate
	Manifestarea curiozității pentru aflarea adevărului în ceea ce privește funcționarea unor produse și procese	Aplicarea cunoașterii științifice pentru rezolvarea unor probleme din cotidian și pentru explicarea funcționării produselor și proceselor tehnologice	Utilizarea datelor științifice și a instrumentelor tehnologice, pentru a fundamenta concluzii sau decizii

SECȚIUNEA I Premise pentru aplicarea curriculumului la clasa a XI-a în anul școlar 2023-2024, învățământ liceal, filiera teoretică, profilul real și filiera vocațională, profilul militar MApN

	tehnologice simple din mediul apropiat		
	Manifestarea unor deprinderi de comportament adecvat privind sănătatea personală și a mediului înconjurător, influențată de activitatea umană	Analiza problemelor legate de siguranță și dezvoltare durabilă, în condițiile progresului științific și tehnologic, în relație cu propria persoană, cu familia și cu comunitatea	Aprecierea avantajelor, limitărilor și riscurilor teoriilor științifice și aplicațiilor tehnologice ale acestora, pentru luarea deciziilor informate și pentru rezolvarea unor probleme de natură etică

Pentru anul școlar 2023-2024, procesul de predare-învățare-evaluare pentru clasa a XI-a se raportează la:

- programele școlare în vigoare pentru disciplina matematică (M1 – M5), **Anexa 2 la OMEC nr. 3252/13.02.2006**
- planurile-cadru în vigoare, aprobate prin **OMECI nr. 3410, 3411, 3412 din 16.03.2009** și **OMECTS 5347/7.09.2011**
- structura anului școlar 2023-2024, aprobată prin **OME nr. 3800/09.03.2023**

<i>Nr. ore/săptămână</i>	<i>Filiera</i>	<i>Profilul</i>	<i>Specializarea</i>	<i>Programa școlară în vigoare</i>
1 oră/săptămână (1 oră TC)	vocațională	pedagogic	toate specializările	M4
		sportiv	toate specializările	
2 ore/săptămână (2 ore CD)	teoretică	umanist	științe sociale	M5
	vocațională	artistic	Arhitectură, arte ambientale și design	M3
		teologic	toate specializările, cu excepția Teologie ortodoxă și Patrimoniu cultural	M5
		ordine și securitate publică (MAI)	științe sociale	M5
3 ore/săptămână (3 ore TC)	tehnologică	toate profilurile	toate specializările	M2
3 ore/săptămână (2 ore TC + 1 oră CD)	teoretică	real	științe ale naturii	M2
4 ore/săptămână (2 ore TC + 2 ore CD)	teoretică	real	matematică-informatică	M1
4 ore/săptămână (4 ore CD)	vocațională	militar (MApN)	matematică-informatică	M1

SECȚIUNEA I Premise pentru aplicarea curriculumului la clasa a XI-a în anul școlar 2023-2024, învățământ liceal, filiera teoretică, profilul real și filiera vocațională, profilul militar MApN

Disciplina Matematică pentru clasa a XI-a continuă, în funcție de specificul filierei, profilurilor și specializărilor, studiul matematicii de la clasa a IX-a și a X-a.

Programa disciplinei matematică pentru clasa a XI-a este defalcată în cinci categorii, evidențiate în tabelul anterior, după numărul și tipul orelor alocate acestei discipline prin planurile-cadru. Programele de matematică, M1 - M5, pentru clasa a XI-a, vizează diferite competențe generale, în funcție de filieră, profil, specializare, subsumând competențe specifice care se integrează și contribuie la formarea culturii de specialitate în domeniul specializării și la profilul absolventului. În acest sens, se recomandă ca accentul învățării matematicii să fie pus pe construirea experiențelor de învățare pentru elevi, pe furnizarea situațiilor-problemă care stimulează raționamentele cognitive și pe interpretarea rezultatului obținut în urma rezolvării de probleme în direcții corelate cu specificul fiecărei programe.

În procesul de predare-învățare-evaluare a matematicii la clasele de la filiera teoretică, profilul real (specializările matematică-informatică și științe ale naturii) și filiera vocațională, profilul militar (specializarea matematică-informatică), se vor avea în vedere:

- dezvoltarea gândirii matematice riguroase și structurate din punct de vedere științific, care să permită modelarea și investigarea unor fenomene sau situații-problemă de la alte discipline;
- evidențierea rolului matematicii în demersurile de analizare calitativă și de optimizare a diferitelor strategii, specifice matematicii, de investigare și de rezolvare a problemelor, în vederea utilizării lor eficiente și creative în diferite contexte;
- integrarea matematicii elementare în sisteme și modele cu grad ridicat de generalitate, sisteme aflate într-o permanentă evoluție și interacțiune cu celelalte discipline și cu lumea înconjurătoare;
- evidențierea legăturilor interdisciplinare ale conceptelor matematice studiate cu viața de zi cu zi și cu alte discipline în scopul dezvoltării competenței de integrare a cunoștințelor matematice cu alte domenii științifice.

Și în anul școlar 2023-2024, o primă etapă necesară constă în evaluarea inițială a elevilor, urmată de activitățile remediale și de progres adaptate atât nevoilor identificate, cât și perspectivei programei școlare pentru clasa a XI-a. Astfel, prin structura sa, evaluarea inițială trebuie să fie o punte de legătură între competențele specifice anterior structurate și competențele specifice (și conceptele matematice suport) din clasa a XI-a.

Planificarea calendaristică și proiectarea unităților de învățare se raportează la lectura riguroasă a programei școlare și la concluziile desprinse din interpretarea rezultatelor obținute de elevi la evaluarea inițială, precum și din analiza holistică a specificului grupului de elevi, bazată pe progresele cognitive și atitudinale ale colectivului de elevi în clasele a IX-a și a X-a, atunci când este posibil. Prin abordarea raportului optim abstract – concret/general - particular, demersurile de formare și dezvoltare a competențelor specifice prevăzute de programa școlară de matematică pentru clasa a XI-a se orientează către structurarea nivelului dezvoltat al competenței-cheie în domeniul științei, tehnologiei, ingineriei și matematicii.

I.2 Recomandări specifice învățământului liceal, filiera teoretică, profilul real și filiera vocațională, profilul militar MAPN

Elementele de analiză matematică și Elemente de calcul matriceal și sisteme de ecuații liniare pe care le studiază un elev în clasa a XI-a contribuie profund la formarea acestuia în ceea ce privește comparația, observația, clasificarea, analogia, inducția, deducția, simțul realității, obișnuința de a gândi nu doar pe secvențe și înțelegerea faptului că orice fragment este parte a unui întreg.

Înțelegerea analizei matematice, în sensul conștientizării necesității utilizării metodelor de analiză matematică în rezolvarea unor probleme, poate crea elevului perseverența, tenacitatea, voința, răbdarea, puterea de a sintetiza, spirit de inventivitate și intuiția de care are nevoie pentru o viață socio-profesională de succes/împlinită.

Prin activitățile desfășurate în timpul lecțiilor, trebuie depășit/eliminat aspectul de aplicare mecanică a unor scheme de lucru matematic și trebuie urmărită dezvoltarea gândirii elevilor, a capacității lor de analiză și sinteză, a intuiției și a raționamentului, precum și acuratețea calculelor. Pe lângă asimilarea noțiunilor de bază ale analizei matematice, împreună cu o privire de ansamblu asupra corelării logice în ceea ce privește legăturile dintre acestea, elevii trebuie încurajați să aibă o atitudine activă: să investigheze detaliat și sub diverse aspecte problema, să construiască și să parcurgă un plan de rezolvare a acesteia, iar în final, să analizeze soluția obținută, inclusiv verosimilitatea rezultatului și interpretări ale acestuia, precum și, eventual, optimizarea soluției găsite.

Pentru ca drumul pe care elevii, îndrumați de profesor, îl au de parcurs în formarea competențelor specifice din programa școlară și aprofundarea conținuturilor matematicii de liceu să fie unul coerent și eficient, trebuie respectate câteva cerințe în construirea și derularea activităților de învățare:

- logica internă a științei, respectarea conținuturilor trebuie să urmeze ordinea lor firească;
- logica didacticii, conținuturile se vor prezenta în funcție de posibilitățile reale ale elevilor de asimilare și de competențele specifice formate anterior ale elevilor;

Selectarea celor mai potrivite metode și procedee poate contribui decisiv la accentuarea caracterului formativ, activ și conștient al formării de competențe specifice din programa școlară. Punctul central al aplicării oricărei metode didactice îl constituie participarea activă și conștientă a elevilor în cadrul lecțiilor.

Având în vedere specificul programei de matematică pentru specializările matematică-informatică și științe ale naturii, prezentăm o serie de practici didactice care facilitează și susțin aceste idei.

- Folosiți exemple concrete și probleme practice pentru a ilustra conceptele abstracte. De exemplu, pentru a preda noțiunea de derivată a unei funcții într-un punct, folosiți exemple de viteză și accelerație. Pentru elemente de calcul matriceal și sisteme de ecuații liniare, folosiți exemple din fizică, economie etc.
- Folosiți strategii inductive - prezentați exemple concrete, apoi treceți la generalizări și la definirea conceptelor.
- Încurajați elevii să vizualizeze conceptele. Desenați diagrame, grafice și reprezentări geometrice pentru a ghida intuiția elevilor. Folosiți diferite programe, precum *MATLAB*., pentru a facilita înțelegerea și vizualizarea anumitor concepte matematice.
- Realizați legătura cu alte domenii. Arătați cum conceptele din analiza matematică și algebră se aplică în statistică, economie, machine learning, grafică computerizată etc.

SECȚIUNEA I Premise pentru aplicarea curriculumului la clasa a XI-a în anul școlar 2023-2024, învățământ liceal, filiera teoretică, profilul real și filiera vocațională, profilul militar MApN

- Puneți accent pe înțelegerea conceptuală și pe rezolvarea de probleme, nu doar pe „manipulări” algebrice ale noțiunilor de analiză matematică sau de calcul matriceal și al sistemelor de ecuații liniare.
- Alegeți o varietate cât mai mare a metodelor de predare-învățare-evaluare: prelegeri scurte, discuții, activități practice, proiecte, învățare prin cooperare etc.
- Propuneți elevilor teme și aplicații care solicită acestora creativitatea, nu doar rezolvări de rutină.
- Folosiți evaluarea formativă - teste scurte, teme, observații - pentru a verifica înțelegerea pe parcurs și pentru a adapta în permanență strategiile de predare-învățare.
- Creați o atmosferă prietenoasă și de sprijin, încurajați participarea activă. Arătați pasiune pentru domeniu.

Pentru evaluarea rezultatelor învățării, pe lângă evaluările sumative, se pot utiliza corelat și alte instrumente, precum:

- T1. Teste scurte în clasă
- T2. Evaluarea performanței în clasă
- T3. Discuții cu elevii
- T4. Proiecte
- T5. Chestionare pentru elevi.

I.3 Perspectiva examenului național de bacalaureat

Examenul național de bacalaureat este modalitatea de evaluare a gradului de formare și dezvoltare a competențelor absolvenților de liceu la discipline de studiu specifice filierei, profilului și specializării absolvite. Dreptul de a susține examenul național de bacalaureat îl au elevii care au promovat învățământul liceal, indiferent de forma de învățământ.

Subiectele pentru probele scrise ale examenului național de bacalaureat se elaborează de către Centrul Național de Politici și Evaluare în Educație (CNPEE) și se stabilesc ținându-se seama de următoarele criterii:

- a) să fie în concordanță cu programele școlare și cu programele de bacalaureat, aprobate și publicate de ME;
- b) să fie proiectate astfel încât tratarea lor să valorifice capacitatea candidaților de analiză, de sinteză, de generalizare și abstractizare;
- c) să asigure o cuprindere echilibrată a materiei studiate, să aibă grad de complexitate corespunzător conținutului programelor de bacalaureat, să evalueze competențele prevăzute în aceste programe;
- d) să permită tratarea subiectelor în timpul prevăzut pentru elaborarea lucrărilor.

Baremele de evaluare și de notare se elaborează de către CNPEE astfel încât să asigure o evaluare unitară la nivel național.

Pregătirea pentru examenul național de bacalaureat este un proces intrinsec legat de întregul proces de predare-învățare-evaluare, câștigând noi valențe de auto-responsabilizare și motivare pentru elevi, respectiv de analiză integratoare adaptată specificului elevilor - remedială sau de performanță - pentru cadrele didactice. Prioritățile sunt parcurgerea în ritm optim, adaptat nevoilor elevilor, a întregii programe școlare și formarea/dezvoltarea competențelor specifice prevăzute de aceasta, cât și familiarizarea elevilor cu specificul susținerii examenului național de bacalaureat, pentru a da prilejul acestora să-și reevalueze opțiunile pentru traseul educațional și/sau profesional ulterior.

Pentru fiecare elev, examenul național de bacalaureat constituie un pas esențial în propria devenire profesională, acest examen având rolul de a certifica competențele dobândite în liceu și de a permite accesul în învățământul superior. La disciplina matematică, dezvoltarea competențelor elevilor la nivel optim și/sau maximal nu se poate realiza numai în anul anterior examenului – procesul de învățare trebuie să fie constant și consecvent, parcurgerea noțiunilor să fie sistematizată, cu etape de fixare, exersare și sinteză bine distribuite în timp.

Având în vedere faptul că, începând cu clasa a XI-a, conținuturile și competențele specifice din programa de matematică se diferențiază în funcție de filieră, profil și specializare, se impune o atenție sporită, din partea cadrului didactic, în selectarea aplicațiilor propuse la clasă. Este recomandat ca elevilor care parcurg programele M1 și M2 de matematică să li se cultive din timp interesul pentru abordarea de probleme științifice și practic - aplicative cât mai diverse, probleme complexe cu mai multe moduri de abordare în vederea soluționării. Un specific al acestor programe este debutul studiului *elementelor de analiză matematică* și al *elementelor de calcul matriceal și sisteme de ecuații*, a căror aprofundare susține un traseu de succes în domeniile STEM.

Astfel, orele de *Elemente de analiză matematică* trebuie să fie cât mai interactive și centrate pe elev - profesorul, urmărind răspunsurile pe care le dau elevii și întrebările pe care aceștia le adresează, se racordează la nevoile lor de învățare și poate optimiza ritmul și orientarea lecției. Cadrul didactic trebuie să stimuleze

SECȚIUNEA I Premise pentru aplicarea curriculumului la clasa a XI-a în anul școlar 2023-2024, învățământ liceal, filiera teoretică, profilul real și filiera vocațională, profilul militar MApN

atenția și interesul elevilor cu o serie de întrebări deschise/situații problemă, să-i îndrume să descopere rezultatele matematice și să creeze/identifice ei înșiși exemple și contraexemple, argumente și contra-argumente. Pentru a evita înțelegerea superficială a conceptelor de bază ale analizei matematice, trebuie să ne asigurăm că elevii înțeleg corect conceptele. În acest sens, utilă și eficientă în predarea matematicii este *regula celor patru*: ideile trebuie exprimate în mod grafic, numeric, verbal și simbolic.

În vederea unei bune pregătiri a elevilor pentru examenul de bacalaureat, dar și pentru viață, în general, profesorul trebuie să antreneze elevii în lecturarea și analiza atentă a enunțurilor matematice și a cerințelor diferitelor probleme. De asemenea, profesorul trebuie să îi ajute pe elevi să *descopere* calea de demonstrație și să-i însoțească pe parcursul construirii demersului argumentativ, în loc să prezinte soluțiile într-un mod tradițional. Chiar dacă o astfel de abordare a predării solicită mai mult timp, trebuie optat pentru ea, conștientizând faptul că nu cantitatea, ci calitatea mesajelor receptate și înțelegerea în profunzime a problemelor discutate au un impact pozitiv major asupra formării elevilor.

De asemenea, în perspectiva examenului național de bacalaureat, în cadrul activităților de predare-învățare-evaluare, se pot reactualiza și fixa cunoștințe din anii anteriori. De exemplu: în cadrul lecțiilor de *Algebră*, operațiile cu matrice sau calculul determinanților permit reactualizarea operațiilor cu puteri, radicali, logaritmi, numere complexe, iar la *Analiză matematică* se pot fixa noțiunile referitoare la funcțiile studiate în clasele a IX-a și a X-a. Pentru o pregătire eficientă a elevilor este utilă folosirea unor *fișe de evaluare/autoevaluare* concepute pe structura subiectelor elaborate de CNPEE.

Creând premisele ca elevul să înțeleagă că atât analiza matematică, cât și algebra matriceală reprezintă studiul unor șiruri de concepte interconexe, cu aplicații largi în diverse ramuri ale științei, se fundamentează și ideea că lucrul independent este o componentă obligatorie a procesului de studiu/formare și că învățarea pe tot parcursul vieții este o necesitate.

O altă modalitate de pregătire pentru examenul național de bacalaureat este *simularea* de etapă a acestuia. Simulările de etapă ale examenului de bacalaureat se pot organiza la nivel de clasă – de către profesorul clasei, la nivel de unitate școlară acolo unde există clase paralele, la nivel de județ – I.S.J./I.S.M.B și/sau la nivel național – de către Ministerul Educației.

Rolul și importanța simulărilor sunt determinate de factori pedagogici cu valențe formative ce urmăresc:

- acomodarea elevilor cu atmosfera de examen, respectarea programului și a regulilor prevăzute în metodologie;
- determinarea nivelului real și obiectiv de pregătire atins de elevi la aceea etapă – realizându-se un feedback al nivelului de pregătire al acestora;
- optimizarea și realizarea unui plan de lucru de pregătire, de recuperare și de dezvoltare a competențelor necesare obținerii de rezultate bune și foarte bune la susținerea examenului național de bacalaureat;
- conștientizarea elevului și a familiei acestuia asupra importanței pregătirii și aprofundării noțiunilor studiate, dezvoltarea capacității elevului de a recunoaște, de a aplica corect și în contexte diferite achizițiile și competențele cognitive;
- formarea/exersarea/dezvoltarea unor tehnici de auto-gestionare a emoțiilor de către elevi, de organizare a timpului de lucru și de optimizare a autocontrolului;
- redactarea completă a rezolvărilor (argumentare, motivare, calcule) și verificarea concordanței dintre cerință și răspuns;
- evaluarea unitară pe bază de barem și raportarea/discutarea rezultatelor la nivel de școală, județ, național.

SECȚIUNEA I Premise pentru aplicarea curriculumului la clasa a XI-a în anul școlar 2023-2024, învățământ liceal, filiera teoretică, profilul real și filiera vocațională, profilul militar MApN

Toate acestea conduc la necesitatea structurării, sistematizării și recapitulării noțiunilor studiate, prin prisma competențelor dezvoltate, prin formarea de atitudini, prin capacitatea elevilor de a corela, recunoaște, completa, aplica, integra inter și transdisciplinar conținuturile cu caracter științific și practic.

Simulările examenului național de bacalaureat trebuie să asigure evidențierea progresului înregistrat de elev în raport cu sine însuși în vederea atingerii obiectivelor sau realizării competențelor prevăzute de programa școlară.

Simulările parțiale (la nivel de școală, județ, naționale), prin diversitatea itemilor (formă și conținut), acoperă o plajă largă a materiei studiate în anii anteriori, cât și o parte din materia studiată în primul modul, respectiv din mai multe module, și determină o analiză completă a situației la învățatură a elevului, a colectivelor de elevi, la acel moment. Astfel, sunt dezvoltate și testate:

- capacitatea de efort susținut;
- capacitatea de selecție calitativă;
- ușurința în redactarea unor cerințe în timp;
- folosirea limbajului matematic adecvat, a terminologiei și a procedurilor de calcul specifice matematicii;
- reconstituirea unor definiții și simboluri;
- mobilitatea în gândire;
- capacitatea de analiză și sinteză;
- explorarea, investigarea și rezolvarea de probleme prin metode variate;
- abilitatea de calcul rapid cu numere naturale, întregi, raționale, reale;
- exprimarea datelor cu ajutorul simbolurilor;
- capacitatea de a face generalizări;
- abilitatea de investigare a valorilor de adevăr a unor afirmații și de utilizare a elementelor de logică și de teoria mulțimilor;
- capacitatea de utilizare a proprietăților unor figuri geometrice sau corpuri geometrice în rezolvarea unor probleme cu conținut practic;
- abilitatea de a extrage informații cu caracter matematic din diverse surse și înțelegerea semnificației acestora.

Discutarea baremului de evaluare și de corectare la nivel de clasă, analizarea greșelilor, evidențierea răspunsurilor complete și corecte, conduc la o familiarizare a elevului cu diferite strategii de abordare a subiectelor examenului național de bacalaureat.

Profesorul intervine, pe baza datelor obținute și centralizate, prin realizarea unor planuri remediale cu scopul de a completa, corecta și exersa noțiunile insuficient asimilate și înțelese de elevi.

Prin feedback-ul pe care îl pot oferi tuturor actorilor educaționali, urmat de o strânsă colaborare a acestor actori, simulările examenului național de bacalaureat pot conduce atât la eficientizarea actului didactic, cât și la creșterea randamentului școlar al elevilor. Simulările examenului național de bacalaureat reprezintă un real suport pentru elevi, părinți și profesori.



SECȚIUNEA a II-a

Orientarea procesului educativ la disciplina matematică

Material elaborat la nivelul Centrului Național de Politici și Evaluare
în Educație și în cadrul GLC 39 Matematică



SECȚIUNEA a II-a Orientarea procesului educativ la disciplina matematică

II.1. Exemple de planificări calendaristice pentru clasa a XI-a, la disciplina matematică, învățământ liceal, filiera teoretică, profilul real și filiera vocațională, profilul militar MApN

II.1.1 Exemplu de planificare calendaristică pentru clasa a XI-a, la disciplina matematică, programa M1 (matematică-informatică)

Unitatea de învățământ:

PLANIFICARE CALENDARISTICĂ ANUALĂ ANUL ȘCOLAR 2023 – 2024*

Matematică

Clasa a XI-a – M1 (filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică și filiera vocațională, profilul militar, specializarea-matematică-informatică)

4 ore/săptămână

Unități de învățare	Competențe specifice	Conținuturi	Număr de ore alocate	Săptămâna	Observații/ Modulul
Recapitulare inițială	CS vizate de programa școlară a clasei a IX-a și a clasei a X-a	<i>Recapitulare – clasa a IX-a și clasa a X-a</i> <i>Evaluare inițială</i> <i>Activități remediale și/sau de progres</i>	4	S1	Modulul 1
Funcții reale de variabilă reală	1.2 2.2 4.2 5.2	<ul style="list-style-type: none">Noțiuni elementare despre mulțimi de puncte pe dreapta reală: interval, mărginire, vecinătăți, dreapta încheiată, simbolurile $+\infty$ și $-\infty$	4	S2	

SECȚIUNEA a II-a Orientarea procesului educativ la disciplina matematică

Unități de învățare	Competențe specifice	Conținuturi	Număr de ore alocate	Săptămâna	Observații/ Modulul
		<ul style="list-style-type: none"> Funcții reale de variabilă reală: funcția polinomială, funcția rațională, funcția putere, funcția radical, funcția logaritmică, funcția exponențială, funcții trigonometrice directe și inverse 			
Șiruri de numere reale	1.2 2.2 3.2 5.2	<ul style="list-style-type: none"> Limita unui șir utilizând vecinătăți, proprietăți Șiruri convergente: intuitiv, comportarea valorilor unei funcții cu grafic continuu când argumentul se apropie de o valoare dată, șiruri convergente; exemple semnificative: $(a^n)_n$, $(n^a)_n$, $\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)_n$ (fără demonstrație), operații cu șiruri convergente, convergența șirurilor utilizând proprietatea lui Weierstrass. Numărul e; limita șirului $\left(1 + u_n\right)^{\frac{1}{u_n}}$, cu $u_n \rightarrow 0$ 	12	S3-S5	
Limite de funcții	1.2 2.2 3.2 4.2 5.2 6.2	<ul style="list-style-type: none"> Limite de funcții: interpretarea grafică a limitei unei funcții într-un punct utilizând vecinătăți, calculul limitelor laterale Calculul limitelor pentru funcțiile studiate; cazuri exceptate la calculul limitelor de funcții: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, 1^∞, ∞^0, 0^0 Asimptotele graficului funcțiilor studiate: asimptote verticale, orizontale, oblice 	8	S6-S7	
Vacanță 28.10.2023-5.11.2023					
Permutări	1.1 3.1 6.1	<ul style="list-style-type: none"> Noțiunea de permutare, operații, proprietăți 	6	S8 S9(2 ore)	Modulul 2

SECȚIUNEA a II-a Orientarea procesului educativ la disciplina matematică

Unități de învățare	Competențe specifice	Conținuturi	Număr de ore alocate	Săptămâna	Observații/ Modulul
		<ul style="list-style-type: none"> Inversiuni, semnul unei permutări 			
Matrice	1.1 2.1 3.1 6.1	<ul style="list-style-type: none"> Tabel de tip matriceal. Matrice, mulțimi de matrice Operații cu matrice: adunarea, înmulțirea, înmulțirea unei matrice cu scalar, proprietăți 	10	S9(2 ore) S10-S11	
Determinanți	3.1 4.1 6.1	<ul style="list-style-type: none"> Determinant de ordin n, proprietăți Aplicații: ecuația unei drepte determinate de două puncte distincte, aria unui triunghi și coliniaritatea a trei puncte în plan 	8	S12-S13	
Matrice inversabile	3.1 4.1 5.1 6.1	<ul style="list-style-type: none"> Matrice inversabile din $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $n \leq 4$ Ecuatii matriceale 	4	S14	
Vacanță 23.12.2023-7.01.2024					
Continuitatea funcțiilor	1.2 2.2 4.2 6.2	<ul style="list-style-type: none"> Interpretarea grafică a continuității unei funcții, studiul continuității în puncte de pe dreapta reală pentru funcțiile studiate, operații cu funcții continue 	8	S15-S16	Modulul 3
Proprietăți ale funcțiilor continue pe intervale	2.2 3.2 4.2 5.2 6.2	<ul style="list-style-type: none"> Semnul unei funcții continue pe un interval de numere reale, proprietatea lui Darboux, studiul existenței soluțiilor unor ecuații în \mathbb{R} 	8	S17-S18	
Derivabilitatea funcțiilor	2.2 3.2 4.2 6.2	<ul style="list-style-type: none"> Tangenta la o curbă, derivata unei funcții într-un punct, funcții derivabile, operații cu funcții care admit derivată, calculul derivatelor de ordin I și al II-lea pentru funcțiile studiate 	8	S19-S20	
Școala altfel				S21	

SECȚIUNEA a II-a Orientarea procesului educativ la disciplina matematică

Unități de învățare	Competențe specifice	Conținuturi	Număr de ore alocate	Săptămâna	Observații/ Modulul
Vacanță 24.02.2024-03.03.2024					
Funcții derivabile pe un interval	1.2 2.2 3.2 4.2 5.2 6.2	<ul style="list-style-type: none"> Funcții derivabile pe un interval: puncte de extrem ale unei funcții, teorema lui Fermat, teorema Rolle, teorema Lagrange și interpretarea lor geometrică, consecințe ale teoremei lui Lagrange: derivata unei funcții într-un punct Regulile lui l'Hospital 	8	S22-S23	Modulul 4
Rolul derivatelor de ordinul I și al II-lea în studiul funcțiilor	3.2 4.2 5.2 6.2	<ul style="list-style-type: none"> Rolul derivatei I în studiul funcțiilor: puncte de extrem, monotonia funcțiilor Rolul derivatei a II-a în studiul funcțiilor: concavitate, convexitate, puncte de inflexiune 	8	S24-S25	
Reprezentarea grafică a funcțiilor	2.2 3.2 4.2 5.2 6.2	<ul style="list-style-type: none"> Rezolvarea grafică a ecuațiilor, utilizarea reprezentării grafice a funcțiilor în determinarea numărului de soluții ale unei ecuații Reprezentarea grafică a funcțiilor Reprezentarea grafică a conicelor (cerc, elipsă, hiperbolă, parabola) 	12	S26-S28	
Săptămâna verde				S29	
Vacanță 27.04.2024-08.05.2024					
Sisteme de ecuații liniare	3.1 4.1 5.1 6.1	<ul style="list-style-type: none"> Sisteme liniare cu cel mult 4 necunoscute, sisteme de tip Cramer, rangul unei matrice Studiul compatibilității și rezolvarea sistemelor: proprietatea Kroneker-Capelli, proprietatea Rouche, metoda Gauss 	20	S30-S34	Modulul 5

SECȚIUNEA a II-a Orientarea procesului educativ la disciplina matematică

Unități de învățare	Competențe specifice	Conținuturi	Număr de ore alocate	Săptămâna	Observații/ Modulul
Recapitulare și sistematizare	CS vizate de programa școlară pentru clasa a XI-a	<ul style="list-style-type: none"> Elemente de calcul matriceal și sisteme de ecuații liniare Elemente de analiză matematică 	8	S35-S36	

NOTE:

- În introducerea noțiunilor de limită a unui șir într-un punct și de șir convergent nu se vor introduce definițiile cu ε și nici teorema de convergență cu ε .
- Se utilizează exprimarea „proprietatea lui”, „regula lui ...”, pentru a sublinia faptul că se face referire la un rezultat matematic utilizat în aplicații, dar a cărui demonstrație este în afara programei.

*Planificarea calendaristică este realizată pentru anul școlar 2023 – 2024, care, pentru clasa a XI-a, are 36 de săptămâni de cursuri (OME nr. 3800/2023).

**Structura anului școlar 2023 - 2024 prevede o vacanță de o săptămână, în perioada 12 februarie – 3 martie 2024, la decizia inspectoratelor școlare județene/al municipiului București. În exemplul de planificare prezentat, această vacanță este stabilită în perioada 24 februarie – 3 martie 2024.

*** Programul „Săptămâna verde” și Programul național „Școala altfel” se desfășoară în perioada 11 septembrie 2023 – 26 aprilie 2024, în intervale de câte 5 zile consecutive lucrătoare, a căror planificare se află la decizia unității de învățământ. Derularea celor două programe nu se planifică în același interval de cursuri (modul de învățare), conform OME nr. 3800/2023. În exemplul prezentat, Programul național „Școala altfel” este planificat în săptămâna S21 (Modulul 3) și Programul „Săptămâna verde” este planificat în săptămâna S29 (modulul 4).

Competențele specifice (CS) din planificare sunt de forma $n.m$, unde $n = \overline{1,6}$ corespunde numerotării competențelor generale din programa școlară și $m = \overline{1,2}$ corespunde conținuturilor din programa școlară, astfel:

$m = 1$ pentru *Elemente de calcul matriceal și sisteme de ecuații liniare*

$m = 2$ pentru *Elemente de analiză matematică*

SECȚIUNEA a II-a Orientarea procesului educativ la disciplina matematică**Planificarea este realizată pentru următoarea structură a anului școlar:**

Modulul	Perioada	Săptămânile de școală									
Modulul 1	11 septembrie – 27 octombrie 2023 (7 săptămâni)	1	2	3	4	5	6	7			
Modulul 2	6 noiembrie – 22 decembrie 2023 (7 săptămâni)	8	9	10	11	12	13	14			
Modulul 3	8 ianuarie – 23 februarie 2024 (6 săptămâni + <i>Școala altfel</i>)	15	16	17	18	19	20	21			
Modulul 4	4 martie – 26 aprilie 2024 (7 săptămâni + <i>Săptămâna verde</i>)	22	23	24	25	26	27	28	29		
Modulul 5	8 mai – 21 iunie 2024 (7 săptămâni)	30	31	32	33	34	35	36			

SECȚIUNEA a II-a Orientarea procesului educativ la disciplina matematică

II.1.2 Exemplu de planificare calendaristică pentru clasa a XI-a, la disciplina matematică, programa M2 (științe ale naturii)

Unitatea de învățământ:

PLANIFICARE CALENDARISTICĂ ANUALĂ
ANUL ȘCOLAR 2023 – 2024*

Matematică

Clasa a XI-a, filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

3 ore/săptămână

Unități de învățare	Competențe specifice	Conținuturi	Număr de ore alocate	Săptămâna	Observații/ Modulul
[se menționează titluri/teme]	[se precizează numărul criterial al competențelor specifice din programa școlară]	[din conținuturile programei școlare]	[stabilite de către cadrul didactic]	[se precizează săptămâna sau săptămânile]	[se menționează, de exemplu, modificări în urma realizării activității didactice la clasă]
Recapitulare inițială	CS vizate de programa școlară a clasei a IX-a și a clasei a X-a	Recapitulare – clasa a IX-a, clasa a X-a (Funcții reale de o variabilă reală: funcția de gradul I, funcția de gradul al II-lea, funcția logaritmică, exponențială, funcția putere ($n = 2, 3$), funcția radical ($n = 2, 3$)) Evaluare inițială Activități remediale și/sau de progres	6	S1 – S2	Modulul 1
Limite de funcții	1.2 2.2 3.2 4.2 5.2	<ul style="list-style-type: none"> Noțiuni elementare despre mulțimi de puncte pe dreapta reală: intervale, mărginire, vecinătăți, dreapta încheiată, simbolurile $+\infty$ și $-\infty$ Limite de funcții: interpretarea grafică a limitei unei funcții într-un punct utilizând vecinătăți, limite laterale 	15	S3 – S7	

SECȚIUNEA a II-a Orientarea procesului educativ la disciplina matematică

Unități de învățare	Competențe specifice	Conținuturi	Număr de ore alocate	Săptămâna	Observații/ Modulul
		<p>pentru: funcția de gradul I, funcția de gradul al II-lea, funcția logaritmică, exponențială, funcția putere ($n = 2, 3$), funcția radical ($n = 2, 3$), funcția raport de două funcții cu grad cel mult 2</p> <ul style="list-style-type: none"> • Calculul limitelor pentru funcția de gradul I, funcția de gradul al II-lea, funcția logaritmică, exponențială, funcția putere ($n = 2, 3$), funcția radical ($n = 2, 3$), funcția raport de două funcții cu grad cel mult 2, cazuri exceptate la calculul limitelor de funcții: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$ • Asimptotele graficului funcțiilor studiate: asimptote verticale, orizontale și oblice 			
Vacanță (28.10.2023 – 05.11.2023)					
Funcții continue	2.2 3.2 4.2 5.2 6.2	<ul style="list-style-type: none"> • Interpretarea grafică a continuității unei funcții, operații cu funcții continue • Semnul unei funcții continue pe un interval de numere reale utilizând consecința proprietății lui Darboux 	12	S8 – S11	Modulul 2
Matrice	1.1 2.1 3.1 6.1	<ul style="list-style-type: none"> • Tabel de tip matriceal. Matrice, mulțimi de matrice • Operații cu matrice: adunarea, înmulțirea, înmulțirea unei matrice cu scalar, proprietăți 	9	S12 – S14	
Vacanță (23.12.2023 – 07.01.2024)					
Determinanți	3.1 4.1 6.1	<ul style="list-style-type: none"> • Determinantul unei matrice pătratice de ordin cel mult 3, proprietăți • Aplicații: ecuația unei drepte determinate de două puncte distincte, aria unui triunghi și coliniaritatea a trei puncte în plan 	12	S15 – S18	Modulul 3

SECȚIUNEA a II-a Orientarea procesului educativ la disciplina matematică

Unități de învățare	Competențe specifice	Conținuturi	Număr de ore alocate	Săptămâna	Observații/ Modulul
Matrice inversabile	3.1	<ul style="list-style-type: none"> Matrice inversabile din $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $n = 2, 3$ Ecuatii matriceale 	6	S19 – S20	
	4.1				
	5.1				
	6.1				
Școala altfel***				S21	
Vacanță** (24.02.2024 – 3.03.2024)					
Funcții derivabile	2.2	<ul style="list-style-type: none"> Tangenta la o curbă. Derivata unei funcții într-un punct, funcții derivabile Operații cu funcții care admit derivată, calculul derivatelor de ordin I și al II-lea pentru funcțiile studiate Regulile lui l'Hospital pentru cazurile $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ 	13	S22 – S25 S26 (1 oră)	Modulul 4
	3.2				
	4.2				
	6.2				
Rolul derivatelor de ordinul I și al II-lea în studiul funcțiilor	1.2	<ul style="list-style-type: none"> Rolul derivatelor de ordinul I și al II-lea în studiul funcțiilor: <ul style="list-style-type: none"> - monotonic - puncte de extrem - concavitate, convexitate 	8	S26 (2 ore) S27 – S28	
	2.2				
	3.2				
	4.2				
	5.2				
	6.2				
Săptămâna verde***				S29	
Vacanță (27.04.2024 – 07.05.2024)					
Reprezentarea grafică a funcțiilor	2.2	<ul style="list-style-type: none"> Reprezentarea grafică a funcțiilor 	7	S30 – S31 S32 (1 oră)	Modulul 5
	3.2				
	4.2				
	5.2				
	6.2				
Sisteme de ecuații liniare	3.1	<ul style="list-style-type: none"> Sisteme liniare cu cel mult 3 necunoscute; forma matriceală a unui sistem liniar Metode de rezolvare a sistemelor liniare: metoda Cramer, metoda Gauss 	8	S32 (2 ore) S33 - S34	
	4.1				
	5.1				
	6.1				
Recapitulare și sistematizare	CS vizate de programa școlară	<ul style="list-style-type: none"> Elemente de calcul matriceal și sisteme de ecuații liniare Elemente de analiză matematică 	6	S35 – S36	

SECȚIUNEA a II-a Orientarea procesului educativ la disciplina matematică

NOTĂ: Se utilizează exprimarea „proprietatea lui”, „regula lui ...”, pentru a sublinia faptul că se face referire la un rezultat matematic utilizat în aplicații, dar a cărui demonstrație este în afara programei.

*Planificarea calendaristică este realizată pentru anul școlar 2023 – 2024, care, pentru clasa a XI-a, are 36 de săptămâni de cursuri (OME nr. 3800/2023).

**Structura anului școlar 2023 - 2024 prevede o vacanță de o săptămână, în perioada 12 februarie – 3 martie 2024, la decizia inspectoratelor școlare județene/al municipiului București. În exemplul de planificare prezentat, această vacanță este stabilită în perioada 24 februarie – 3 martie 2024.

*** Programul „Săptămâna verde” și Programul național „Școala altfel” se desfășoară în perioada 11 septembrie 2023 – 26 aprilie 2024, în intervale de câte 5 zile consecutive lucrătoare, a căror planificare se află la decizia unității de învățământ. Derularea celor două programe nu se planifică în același interval de cursuri (modul de învățare), conform OME nr. 3800/2023. În exemplul prezentat, Programul național „Școala altfel” este planificat în săptămâna S21 (Modulul 3) și Programul „Săptămâna verde” este planificat în săptămâna S29 (modulul 4).

Competențele specifice (CS) din planificare sunt de forma $n.m$, unde $n = \overline{1,6}$ corespunde numerotării competențelor generale din programa școlară și $m = \overline{1,2}$ corespunde conținuturilor din programa școlară, astfel:

$m = 1$ pentru Elemente de calcul matriceal și sisteme de ecuații liniare

$m = 2$ pentru Elemente de analiză matematică

Planificarea este realizată pentru următoarea structură a anului școlar:

Modulul	Perioada	Săptămânile de școală								
Modulul 1	11 septembrie – 27 octombrie 2023 (7 săptămâni)	1	2	3	4	5	6	7		
Modulul 2	6 noiembrie – 22 decembrie 2023 (7 săptămâni)	8	9	10	11	12	13	14		
Modulul 3	8 ianuarie – 23 februarie 2024 (6 săptămâni + Școala altfel)	15	16	17	18	19	20	21		
Modulul 4	4 martie – 26 aprilie 2024 (7 săptămâni + Săptămâna verde)	22	23	24	25	26	27	28	29	
Modulul 5	8 mai – 21 iunie 2024 (7 săptămâni)	30	31	32	33	34	35	36		

II.2 Exemple de platforme/aplicații care sprijină elaborarea și administrarea de instrumente de evaluare

Utilizarea platformelor/aplicațiilor care sprijină elaborarea și administrarea de instrumente de evaluare la matematică reprezintă atât o integrare în educație a tendințelor actuale de digitalizare a tuturor domeniilor vieții socio-profesionale, cât și o modalitate de dezvoltare a relevanței și de eficientizare a strategiilor de evaluare în cadrul mai larg al procesului de predare-învățare-evaluare.

În alegerea platformelor/aplicațiilor ce urmează a fi utilizate în procesul de predare-învățare-evaluare se vor avea în vedere o serie de aspecte, precum:

- accesibilitatea platformei pentru elevi, inclusiv din punct de vedere a afișării unor mesaje de suport sau de ajutor în limba română;
- posibilitatea/facilitatea operării de modificări în materialele proprii create sau în materiale existente în regim de liberă utilizare;
- posibilitatea partajării resurselor create cu alți profesori;
- corelarea tipurilor de instrumente disponibile cu specificul de vârstă al elevilor cărora li se va administra evaluarea;
- posibilitatea creării de resurse de evaluare destinate lucrului în echipe de elevi;
- posibilitatea de a colecta individualizat răspunsurile elevilor, în vederea unor analizări ulterioare;
- protecția datelor personale ale elevilor.

La elaborarea instrumentelor de evaluare în format digital se vor avea în vedere:

- corelarea tipurilor de itemi cu specificul disciplinei și scopul evaluării;
- adaptarea modalității de furnizare și colectare a rezultatelor la scopul evaluării;
- respectarea programei școlare în vigoare;
- orientarea către formarea/dezvoltarea de competențe, structurarea/formularea fiecărui item astfel încât să furnizeze feedback clar (inclusiv în cazul diverselor răspunsuri incorecte);
- alocarea optimă a resursei – timp pentru parcurgerea evaluării.

Utilizarea platformelor/aplicațiilor pentru elaborarea și administrarea de instrumente de evaluare să contribuie la:

- facilitarea unor abordări inovative de evaluare;
- monitorizarea constantă a progresului elevilor;
- oferirea de feedback imediat către elevi cu privire la rezultatele evaluării;
- autoevaluarea propriilor strategii de predare-învățare și adaptarea acestora la nevoile elevilor.

Exemple de platforme concepute pentru a sprijini procesul de evaluare:

- Google Workspace for Education
- Moodle
- Microsoft Teams for Education
- <https://asq.ro/>
- <https://www.digitaliada.ro/>
- <https://www.edx.org/>

Exemple de aplicații gratuite pentru crearea de teste sau chestionare:

- <https://learningapps.org/>
- <https://wordwall.net/>
- <https://quizizz.com/>
- <https://kahoot.com/>
- <https://www.grasple.com/>
- <https://www.mentimeter.com/>



SECȚIUNEA a III-a

Predare-învățare-evaluare.

**Recomandări și exemplificări la disciplina matematică,
clasa a XI-a**

**Material elaborat la nivelul Centrului Național de Politici și Evaluare
în Educație și în cadrul GLC 39 Matematică**



SECȚIUNEA a III-a Predare-învățare-evaluare. Recomandări și exemplificări la disciplina matematică, clasa a XI-a

III.1. Elemente de proiectare didactică

III.1.1 Elemente de proiectare didactică – exemplificare pentru unitatea de învățare *Matrice*, clasa a XI-a, programa școlară pentru matematică M1 (matematică-informatică), 4 ore/săptămână

Matematică

Clasa a XI-a M1 (matematică-informatică) 4 ore/săptămână

Domeniul de conținut: Elemente de calcul matriceal și sisteme de ecuații liniare

Unitatea de învățare: Matrice

Exemplificare – elemente de proiectare a unității de învățare

Conținuturi (detalieri)	Competențe specifice	Activități de învățare	Resurse	Evaluare
[se menționează detalieri de conținut care explicitează anumite parcursuri]	[se precizează nr. criterial al competențelor specifice din programa școlară]	[vizate/recomandate de programa școlară sau altele adecvate pentru realizarea competențelor specifice]	[se precizează resurse de timp, de loc, material didactic, forme de organizare a clasei]	[se menționează metodele, instrumentele sau modalitățile de evaluare utilizate]
L1. Tabel de tip matriceal. Matrice, mulțimi de matrice.		Recapitularea noțiunilor necesare, învățate anterior (noțiunile-ancoră) <i>Elemente de conținut vizate:</i> <ul style="list-style-type: none">▪ Noțiunea de permutare, operații, proprietăți, inversiuni.	Fișă de lucru evaluată cu aplicația PLICKERS Activitate individuală	Administrarea probei Fiecare item se prezintă pe rând elevilor, urmând cu ajutorul aplicației PLICKERS să fie evaluate

SECȚIUNEA a III-a Predare-învățare-evaluare. Recomandări și exemplificări la disciplina matematică, clasa a XI-a

Conținuturi (detalieri)	Competențe specifice	Activități de învățare	Resurse	Evaluare
Transpusa unei matrice. (2 ore)				răspunsurile acestora (prezentate pe jetoane) Se oferă feedback personalizat, precum și o situație statistică pe grupul de elevi Identificarea elevilor care necesită suport remedial
	1.1.	<ul style="list-style-type: none"> • Reprezentarea matriceală a unui tabel de date caracteristic unui proces specific domeniului economic sau tehnic 	<ul style="list-style-type: none"> • <i>Fișa de lucru 1</i> Activitate frontală 	Discuție frontală
	2.1.	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Identificarea/recunoașterea tipurilor de matrice și a elementelor acestora (de exemplu, diagonala principală a unei matrice pătratice) • Scrierea transpusei unei matrice (respectiv scrierea matricei atunci când se cunoaște transpusa ei) • Determinarea unor numere reale/complexे folosind egalitatea a două matrice 		Verificare și feedback pe grupe
L2. Adunarea matricelor. Înmulțirea cu scalari. Proprietăți. (2 ore)	3.1.	<ul style="list-style-type: none"> • Operații de adunare/scădere a două sau mai multe matrice • Aplicarea proprietăților adunării matricelor • Operația de înmulțire cu un scalar a unei matrice • Aplicarea proprietăților înmulțirii cu scalari a matricelor 	<ul style="list-style-type: none"> • <i>Fișa de lucru 2</i> – exercițiile 1 - 3 diferențiate pe nivel de dificultate Activitate diferențiată 	Verificare și feedback pe grupe

SECȚIUNEA a III-a Predare-învățare-evaluare. Recomandări și exemplificări la disciplina matematică, clasa a XI-a

Conținuturi (detalieri)	Competențe specifice	Activități de învățare	Resurse	Evaluare
	6.1.	<ul style="list-style-type: none"> Utilizarea unor noțiuni anterior studiate în calculul unei sume de matrice 	<ul style="list-style-type: none"> <i>Fișa de lucru 2</i> – exercițiile 4 - 5 Activitate frontală 	Discuție frontală
L3. Înmulțirea matricelor. Proprietăți. (2 ore)	3.1.	<ul style="list-style-type: none"> Înmulțirea a două sau mai multe matrice Aplicarea proprietăților înmulțirii matricelor 	<ul style="list-style-type: none"> <i>Fișa de lucru 3</i> – exercițiile 1 - 3 diferențiate pe nivel de dificultate Activitate diferențiată 	Verificare și feedback pe grupe
	6.1.	<ul style="list-style-type: none"> Utilizarea unor noțiuni anterior studiate în calculul unui produs de matrice 	<ul style="list-style-type: none"> <i>Fișa de lucru 3</i> – exercițiile 4 - 5 Activitate frontală <i>Fișa de lucru 3</i> – exercițiul 6 	Discuție frontală
L4. Operații cu matrice. Proprietăți (2 ore)	3.1.	<ul style="list-style-type: none"> Înmulțirea a două sau mai multe matrice Aplicarea proprietăților înmulțirii matricelor 	<ul style="list-style-type: none"> <i>Fișa de lucru 4</i> – exercițiile 1 - 2 Activitate diferențiată pe nivele de dificultate 	Verificare și feedback pe grupe
	5.1.	<ul style="list-style-type: none"> Utilizarea unor metode specifice calculului cu matrice pentru demonstrarea unor egalități sau pentru rezolvarea unor ecuații Verificarea validității unor afirmații 	<ul style="list-style-type: none"> <i>Fișa de lucru 4</i> – exercițiul 3 Activitate frontală 	Evaluare prin sondaj
	6.1.	<ul style="list-style-type: none"> Rezolvarea de probleme și situații-problemă Transferul și extrapolarea soluțiilor unor probleme pentru rezolvarea altora 	<ul style="list-style-type: none"> <i>Fișa de lucru 4</i> – exercițiile 4 - 6 Discuție dirijată 	Feedback frontal
L5. Evaluare sumativă (1 oră)	1.1. 2.1. 3.1. 4.1.	<ul style="list-style-type: none"> Evaluare sumativă 	<ul style="list-style-type: none"> Test de evaluare Activitate individuală 	Administrarea probei

SECȚIUNEA a III-a Predare-învățare-evaluare. Recomandări și exemplificări la disciplina matematică, clasa a XI-a

Conținuturi (detalieri)	Competențe specifice	Activități de învățare	Resurse	Evaluare
	6.1.			
L6. Activitate remedială (1 oră)	1.1. 2.1. 3.1. 4.1.	<ul style="list-style-type: none">• Discutarea rezolvării testului de evaluare• Activitate remedială	<ul style="list-style-type: none">• Activitate în perechi	Corectarea probei Verificare și feedback perechi

Clasa a XI-a M1 (4 ore)
Unitatea de învățare: Matrice
Evaluare inițială

EVALUARE INIȚIALĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul de lucru efectiv este de 20 de minute.
- Pentru fiecare item, dintre cele patru variante de răspuns doar o variantă este corectă.

Ridicați jetonul corespunzător răspunsului corect la finalul timpului de lucru pentru fiecare item în parte.

15p <i>1 min</i>	1. Care din următoarele tablouri reprezintă o permutare? A. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$
15p <i>1 min</i>	2. Care din următoarele afirmații este adevărată? A. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$
15p <i>1 min</i>	3. Dacă $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ atunci σ^{-1} este: A. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \\ 3 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
15p <i>5 min</i>	4. Numărul inversiunilor permutării $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & 8 & 9 & 10 & \dots & 16 \\ 1 & 3 & 5 & \dots & 15 & 2 & 4 & \dots & 16 \end{pmatrix}$ este egal cu: A. 28 B. 29 C. 30 D. 32
15p <i>2 min</i>	5. Ecuația $x^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ are în S_5 un număr de soluții egal cu: A. 0 B. 1 C. 4 D. 8

SECȚIUNEA a III-a Predare-învățare-evaluare. Recomandări și exemplificări la disciplina matematică, clasa a XI-a

15p	6. Numărul permutărilor din S_4 , care comută cu $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ este egal cu:
<i>10 min</i>	A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Barem de corectare

1	2	3	4	5	6
B	C	D	A	A	C
15p	15p	15p	15p	15p	15p

Matrice de specificații
Evaluare inițială

Competențe de evaluat	CS 1.1	CS 2.1	CS 3.1	CS 4.1	CS 5.1	CS 6.1	Total
Conținuturi							
Noțiunea de tablou, permutare		1 (15p)					15p
Operații cu permutări			2 (15p)				15p
Inversa unei permutări	3 (15p)						15p
Inversiuni				4 (15p)			15p
Semnul unei permutări					5 (15p)		15p
Proprietățile înmulțirii permutărilor						6 (15p)	15p
Total	15p	15p	15p	15p	15p	15p	90p

Competențe de evaluat asociate evaluării inițiale pentru unitatea de învățare Matrice:

CS 1.1 Identificarea unor situații practice concrete, care necesită asocierea unui tabel de date cu reprezentarea matriceală a unui proces specific domeniului economic sau tehnic

CS 2.1 Asocierea unui tabel de date cu reprezentarea matriceală a unui proces

CS 3.1 Aplicarea algoritmilor de calcul în situații practice

CS 4.1 Rezolvarea unor ecuații și sisteme utilizând algoritmi specifici

CS 5.1 Stabilirea unor condiții de existență și/sau compatibilitate a unor sisteme și identificarea unor metode adecvate de rezolvare a acestora

CS 6.1 Optimizarea rezolvării unor probleme sau situații-problemă prin alegerea unor strategii și metode adecvate (de tip algebric, vectorial, analitic, sintetic)

Evaluarea inițială pentru unitatea de învățare Matrice poate fi evaluată cu ajutorul aplicației PLICKERS (demo online la adresa <https://get.plickers.com>)

Clasa a XI-a – M1 (matematică-informatică) 4 ore/săptămână

Unitatea de învățare: Matrice

Lecția L1: Tabel de tip matriceal. Matrice, mulțimi de matrice. Transpusa unei matrice.

Fișa de lucru 1

1. Echipa reprezentativă de fotbal a orașului comercializează articole sportive cu însemnele echipei atât la magazinul de prezentare de la sediul clubului (magazinul A), cât și în magazinul Fan-Zone (magazinul B) situat în centrul orașului. Tabelele de mai jos indică situația vânzărilor săptămânale, de-a lungul a patru săptămâni, în cele două magazine.

Magazin sediu (A)

	S 1	S 2	S 3	S 4
Tricouri	75	41	61	88
Șepci	24	39	62	80
Fulare	80	77	54	90

Magazin Fan-Zone (B)

	S 1	S 2	S 3	S 4
Tricouri	63	88	37	54
Șepci	41	90	22	48
Fulare	82	70	41	54

- a) Scrieți datele din tabele sub forma a două matrice $A, B \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R})$, corespunzătoare vânzărilor din fiecare magazin.
- b) Folosind datele din tabele, formați trei matrice $T, S, F \in \mathcal{M}_{2,4}(\mathbb{R})$ care să cuprindă numărul de tricouri, șepci, respectiv fulare vândute în cele două magazine, de-a lungul celor patru săptămâni.

2. Se consideră matricea $M = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

- a) Scrieți matricea coloană C ale cărei elemente sunt elementele coloanei a doua a matricei M .
- b) Scrieți matricea linie L ale cărei elemente sunt elementele liniei a treia a matricei M .
- c) Scrieți matricea pătratică P ale cărei coloane coincid cu unele dintre coloanele matricei M , știind că elementele de pe diagonala principală a matricei P sunt, în ordine, -2 , 0 și 1 .

3. a) Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,4}(\mathbb{R})$. Scrieți transpusa matricei A .

b) Determinați matricea B , știind că transpusa ei este matricea $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Determinați numerele naturale a , b , c și d pentru care matricele $A = \begin{pmatrix} 2a+1 & -3 \\ \frac{1}{c-2} & d-2 \end{pmatrix}$ și

$B = \begin{pmatrix} 5 & b^2-4 \\ -1+\frac{c-1}{c-2} & a \end{pmatrix}$ sunt egale și aparțin mulțimii $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.

Clasa a XI-a – M1 (matematică-informatică) 4 ore/săptămână

Unitatea de învățare: Matrice

Lecția L2: Adunarea matricelor. Înmulțirea cu scalari. Proprietăți.

Fișa de lucru 2

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ și

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- a) Calculați $A + B$.
- b) Calculați $C + D$.
- c) Calculați $E + F$.
- d) Calculați $A - B - {}^t C$.
- e) Calculați $B - A - {}^t D$.
- f) Calculați $2C - {}^t D$.
- g) Calculați $E - 2F$.

2. Determinați, în fiecare caz în parte, matricele X și Y , știind că:

$$\text{a) } \begin{cases} 2X + 3Y = \begin{pmatrix} 8 & 7 & -2 \\ 1 & -6 & 5 \end{pmatrix}; \\ X - 2Y = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} X - 3Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ 2X - 5Y = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

3. Determinați numerele reale x, y și z astfel încât $x \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - y \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

4. Se consideră matricea $A_k \in M_{2,3}(\mathbb{R})$, unde $k \in \mathbb{N}$, $A_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & k-1 \\ 2k & k(1+k) & k^2 \end{pmatrix}$. Calculați suma $S_n = A_1 + A_2 + \dots + A_n$.

5. Știind că ε este o soluție a ecuației $x^2 + x + 1 = 0$, calculați suma $\sum_{k=1}^n \begin{pmatrix} \varepsilon^k & \varepsilon^{2k} & \varepsilon^{3k} \\ \varepsilon^{3k} & \varepsilon^k & \varepsilon^{2k} \end{pmatrix}$, în funcție de numărul natural nenul n .

Clasa a XI-a – M1 (matematică-informatică) 4 ore/săptămână

Unitatea de învățare: Matrice

Lecția L3: Înmulțirea matricelor. Proprietăți.

Fișa de lucru 3

1. Se consideră matricele: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Precizați dacă se pot efectua

următoarele operații și, în caz afirmativ, efectuați operația:

- a) $A \cdot B$;
- b) $B \cdot A$;
- c) $A \cdot C$;
- d) $C \cdot A$;
- e) $A \cdot C - C \cdot A$.

2. Determinați matricea $B = A^2 - 5A + 6I_2$, unde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

3. Determinați matricele $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, pentru care $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

4. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1-2x & 2x \\ -x & 1+x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a) Arătați că $A(x) \cdot A(y) = A(1 - (1-x)(1-y))$, pentru orice numere reale x și y .

b) Determinați numărul real x pentru care $A(x) \cdot A(x) \cdot A(x) = A(1-3x)$.

c) Demonstrați că $A(x_1) \cdot A(x_2) \cdot \dots \cdot A(x_n) = A(1 - (1-x_1)(1-x_2)\dots(1-x_n))$, pentru orice număr natural nenul n și orice numere reale x_1, \dots, x_n .

d) Determinați numărul natural n , știind că $A(2) \cdot A(3) \cdot \dots \cdot A(2023) = A(1-n!)$.

e) Determinați numerele reale m pentru care $(A(4))^{2024} = (A(m))^{1012}$, unde

$$(A(x))^n = \underbrace{A(x) \cdot A(x) \cdot \dots \cdot A(x)}_{\text{de } n \text{ ori } A(x)}, \text{ pentru orice număr natural nenul } n.$$

5. Se consideră matricele $A_n = \begin{pmatrix} n & 1 & 0 \\ -1 & n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde n este număr natural nenul.

a) Determinați perechile (m, n) de numere naturale pentru care $A_n \cdot A_m = 10A_2$.

b) Arătați că există două șiruri de numere reale, $(x_n)_{n \geq 1}$ și $(y_n)_{n \geq 1}$, astfel încât

$$A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n = A_n = \begin{pmatrix} x_n & y_n & 0 \\ -y_n & x_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

6. Aplicații practice ale operațiilor cu matrice – Animarea personajelor în grafica computerizată

Într-un joc video, un personaj trebuie să parcurgă un teren complicat pentru a ajunge la o destinație. Pentru a face mișcarea personajului mai realistă, programatorul trebuie să aplice transformări adecvate asupra modelului său 3D. Personajul este inițial reprezentat printr-o matrice de poziție și orientare în spațiu.

Modelarea matematică, utilizând matrice, a situației practice:

- Inițializarea: Matricea inițială a personajului este dată de:

$$M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & 0 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 & z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ unde } (x_0, y_0, z_0) \text{ sunt coordonatele punctului inițial într-un sistem de}$$

trei axe de coordonate Ox , Oy și Oz , necoplanare și oricare două perpendiculare.

- Translație: Pentru a deplasa personajul înainte cu o anumită distanță d pe axa Ox , matricea

$$\text{de translație este: } M_d = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & d \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Rotație: Pentru a roti personajul cu un unghi θ în jurul axei Oy , matricea de rotație este:

$$M_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Aplicarea transformărilor/mișcărilor asupra personajului: Pentru a obține matricea finală care reprezintă poziția și orientarea personajului după mutare și rotație, trebuie să înmulțim matricele de transformare în ordinea potrivită: $M_{final} = M_d \cdot M_\theta \cdot M_0$. Din matricea M_{final} se vor citi coordonatele finale ale personajului.

Dacă inițial personajul se află în poziția $(2,3,0)$ și trebuie să meargă înainte cu o distanță de 4 unități

și să se rotească cu un unghi de $\frac{\pi}{6}$ radiani, calculează matricea finală și determină noile coordonate

ale personajului.

Clasa a XI-a – M1 (matematică-informatică) 4 ore/săptămână

Unitatea de învățare: Matrice

Lecția L4: Operații cu matrice. Proprietăți.

Fișa de lucru 4

Observație: Pentru o matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, se notează $A^0 = I_n$, $A^1 = A$, $A^m = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{\text{de } m \text{ ori } A}$, unde m număr natural, $m \geq 2$.

1. Se consideră matricele $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ și $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, unde a și b sunt numere reale, cu $b \neq 0$.

a) Arătați că $A = aI_2 + bJ$.

b) Arătați că $J^2 = I_2$.

c) Demonstrați că, pentru orice număr natural nenul n , are loc egalitatea $A^n = x_n I_2 + y_n J$, unde

$$x_n = C_n^0 a^n + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^{2k} a^{n-2k} b^{2k} + \dots \text{ și}$$

$$y_n = C_n^1 a^{n-1} b + C_n^3 a^{n-3} b^3 + \dots + C_n^{2k+1} a^{n-1-2k} b^{2k+1} + \dots .$$

d) Arătați că $x_n = \frac{(a+b)^n + (a-b)^n}{2}$ și $y_n = \frac{(a+b)^n - (a-b)^n}{2}$, pentru orice număr natural nenul n .

e) Arătați că, dacă matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ verifică relația $A \cdot X = X \cdot A$, atunci există $u, v \in \mathbb{R}$ astfel

încât $X = \begin{pmatrix} u & v \\ v & u \end{pmatrix}$.

f) Rezolvați în mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuația $X^3 = \begin{pmatrix} 13 & 14 \\ 14 & 13 \end{pmatrix}$.

2. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Arătați că $A = I_3 + B$.

b) Calculați B^3 .

c) Folosind eventual formula binomului lui Newton pentru matrice care comută, demonstrați că

$$A^n = I_3 + C_n^1 B + C_n^2 B^2, \text{ pentru orice număr natural } n, n \geq 2.$$

d) Determinați cel mai mic număr natural n pentru care suma elementelor matricei A^n este mai mare sau egală cu 100.

3. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculați A^3 .

b) Arătați că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, există $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ astfel încât $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n \end{pmatrix}$, iar termenii

șirurilor $(a_n)_{n \geq 1}$ și $(b_n)_{n \geq 1}$ verifică relațiile $a_{n+1} = a_n - 2b_n$ și $b_{n+1} = -a_n$.

c) Demonstrați că $A^n = \frac{2^n - (-1)^n}{3} A + \frac{2^n + 2(-1)^n}{3} I_3$, pentru orice număr natural nenul n .

4. Se consideră mulțimea $G = \left\{ A_t = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$.

a) Ce obțineți dacă înmulțiți o matrice $A_t \in G$ cu matricea coloană $\begin{pmatrix} s \\ v \\ a \end{pmatrix}$? Interpretați fizic.

b) Arătați că $A_t \cdot A_u = A_{t+u}$, pentru orice $t, u \in \mathbb{R}$, și interpretați fizic această egalitate.

c) Determinați $(A_t)^n$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

d) Rezolvați în $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ecuația $A_3 \cdot X = A_7$.

5. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ și mulțimea $G = \{X(a) = I_2 + aA \mid a \in \mathbb{R}\}$.

a) Arătați că $X(a) \cdot X(b) \in G$, pentru orice numere reale a și b .

b) Arătați că există $e \in \mathbb{R}$ astfel încât $X(a) \cdot X(e) = X(e) \cdot X(a) = X(a)$, pentru orice număr real a .

c) Rezolvați ecuația $X \cdot X = I_2$, $X \in G$.

d) Rezolvați ecuația $X \cdot X \cdot X = I_2$, $X \in G$.

6. Se consideră numerele naturale nenule m, n, p și q și matricea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Considerăm funcția

$$f_A : \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R}), f_A(X) = A \cdot X.$$

a) Arătați că $f_A(X + Y) = f_A(X) + f_A(Y)$, pentru orice $X, Y \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

b) Arătați că $f_A(tX) = t f_A(X) = f_{tA}(X)$, pentru orice $t \in \mathbb{R}$ și orice $X \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

c) Arătați că, dacă $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, atunci $f_{A+B}(X) = f_A(X) + f_B(X)$, pentru orice $X \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

d) Arătați că, dacă $B \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{R})$ și funcția $f_B : \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ este definită prin

$$f_B(Y) = B \cdot Y, \text{ pentru orice } Y \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{R}), \text{ atunci } f_A \circ f_B = f_{A \cdot B}.$$

Clasa a XI-a – M1 (matematică-informatică) 4 ore/săptămână
Unitatea de învățare: Matrice

Recomandări pentru profesor– Fișe de lucru

Fișele de lucru 1 și 2 au în vedere alternarea prezentării conținuturilor noi cu formularea de sarcini care presupun moduri variate de antrenare a gândirii și cu solicitarea identificării legăturilor intradisciplinare privind noțiunea de matrice, operațiile cu matrice și proprietățile acestora. Este recomandată implicarea elevilor în prezentarea raționamentelor de lucru (generale și/sau particulare) și în analizarea diferitelor modalități de soluționare a unei probleme.

Pentru Fișele de lucru 3 și 4, în funcție de specificul colectivului de elevi, profesorul va decide alocarea temporală pentru fiecare activitate de învățare, precum și gradul de detaliere a unor discuții preliminare, respectiv finale fiecărei sarcini de lucru.

Problema 6, din Fișa de lucru 3, implică elevii în modelarea unor situații reale și aplicarea cunoștințelor despre operațiile cu matrice pentru a rezolva o situație – problemă reală dintr-un domeniu de activitate de actualitate – grafică și animații în mediul digital.

Rezolvare - Fișa de lucru 4

1.

a) Se verifică imediat, pe baza definiției înmulțirii unei matrice cu un scalar și a adunării matricelor.

b) Se obține prin calcul direct că $J^2 = I_2$.

c) $J^{2k} = I_2$ și $J^{2k+1} = J$, pentru orice număr natural k . Deoarece matricea aI_2 comută cu orice matrice, putem folosi formula pentru dezvoltarea binomului lui Newton pentru a calcula A^n :
$$A^n = (aI_2 + bJ)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k (aI_2)^{n-k} \cdot (bJ)^k = \left(\sum_{k=0}^n C_n^{2k} a^{n-2k} b^{2k} \right) I_2 + \left(\sum_{k=0}^n C_n^{2k+1} a^{n-1-2k} b^{2k+1} \right) J = x_n I_2 + y_n J.$$

d) Cum $x_n + y_n = (a+b)^n$ și $x_n - y_n = (a-b)^n$, obținem că $x_n = \frac{(a+b)^n + (a-b)^n}{2}$, respectiv $y_n = \frac{(a+b)^n - (a-b)^n}{2}$.

e) Deoarece $b \neq 0$, condiția $A \cdot X = X \cdot A$ este echivalentă cu $J \cdot X = X \cdot J$. Notând $X = \begin{pmatrix} u & v \\ w & t \end{pmatrix}$, egalitatea anterioară devine $\begin{pmatrix} w & t \\ u & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v & u \\ t & w \end{pmatrix}$, de unde obținem $u = t$ și $v = w$, deci $X = \begin{pmatrix} u & v \\ v & u \end{pmatrix}$.

f) Notând $X^3 = A$, cum A are forma de la punctele a) – c) pentru $a = 13$ și $b = 14$ și $A \cdot X = X^4 = X \cdot A$, rezultă că există numere reale u și v astfel încât $X = \begin{pmatrix} u & v \\ v & u \end{pmatrix}$. Cu relațiile stabilite la punctele b) și c), ecuația

$$\text{dată se reduce la sistemul de ecuații } \begin{cases} (u+v)^3 + (u-v)^3 = 26 \\ (u+v)^3 - (u-v)^3 = 28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u+v)^3 = 27 \\ (u-v)^3 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 2 \end{cases}.$$

2. a) Relația $A = I_3 + B$ se verifică imediat.

b) $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $B^3 = O_3$.

c) $B^k = O_3$ pentru orice număr natural k , $k \geq 3$. Cu formula binomului lui Newton pentru matrice care

comută, obținem $A^n = (I_3 + B)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k B^k = I_3 + C_n^1 B + C_n^2 B^2$. Obținem $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & n^2 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, pentru orice

număr natural n , $n \geq 2$.

3. a) $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ și $A^3 = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -3 \\ -3 & 5 & -3 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$.

b) Prin inducție după n rezultă atunci că $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n \end{pmatrix}$, șirurile $(a_n)_{n \geq 1}$ și $(b_n)_{n \geq 1}$ verificând relațiile

de recurență $a_{n+1} = a_n - 2b_n$ și $b_{n+1} = -a_n$ pentru orice număr natural nenul n .

c) Pentru demonstrație se poate utiliza metoda inducției matematice sau egalitatea $A = 2I_3 - B$, unde

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. a) Notând $\begin{pmatrix} s_t \\ v_t \\ a_t \end{pmatrix} = A_t \cdot \begin{pmatrix} s \\ v \\ a \end{pmatrix}$, obținem $a_t = a$, $v_t = v + at$ și $s_t = s + vt + \frac{at^2}{2}$, pentru orice $t \in \mathbb{R}$.

Acestea sunt exact ecuațiile mișcării uniform accelerate cu condițiile inițiale $s_0 = s$, $v_0 = v$ și accelerație constantă a .

b) Pentru orice $t, u \in \mathbb{R}$ avem $A_t \cdot A_u = \begin{pmatrix} 1 & t+u & \frac{t^2}{2} + tu + \frac{u^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A_{t+u}$.

c) Cu proprietatea de la punctul b rezultă că $(A_t)^n = A_{nt}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ și $t \in \mathbb{R}$.

d) Cum $A_0 = I_3$, avem că $A_3 \cdot X = A_7 \Leftrightarrow X = I_3 \cdot X = A_{-3} \cdot A_3 \cdot X = A_{-3} \cdot A_7 = A_4$.

5. a) Deoarece $A^2 = \begin{pmatrix} 20 & 10 \\ 10 & 5 \end{pmatrix} = 5A$, obținem

$$X(a) \cdot X(b) = I_2 + aA + bA + abA^2 = I_2 + (a+b+5ab)A = X(a+b+5ab) \in G.$$

b) Pentru $e = 0$, $X(0) = I_2$ și au loc egalitățile $X(a) \cdot X(0) = X(0) \cdot X(a) = X(a)$, pentru orice $a \in \mathbb{R}$.

c) $X(a) \cdot X(a) = X(2a+5a^2)$, deci $X(2a+5a^2) = X(0)$, de unde obținem $2a+5a^2 = 0$, cu soluțiile $a_1 = 0$

și $a_2 = -\frac{2}{5}$. Obținem $X_1 = I_2$ și $X_2 = X\left(-\frac{2}{5}\right)$.

d) $X(a) \cdot X(a) \cdot X(a) = X\left(3a + 10a^2 + 25a^3\right)$ și obținem $3a + 10a^2 + 25a^3 = 0$, care are o singură soluție reală – $a=0$. Rezultă că $X_1 = I_2$ este singura soluție a ecuației date.

6.

a) Avem $f_A(X+Y) = A \cdot (X+Y) = A \cdot X + A \cdot Y = f_A(X) + f_A(Y)$, pentru orice matrice $X, Y \in \mathcal{M}_{n \times p}(\mathbb{R})$.

b) $f_A(tX) = A \cdot (tX) = t(A \cdot X) = t f_A(X) = (tA) \cdot X = f_{tA}(X)$, pentru orice $t \in \mathbb{R}$ și orice $X \in \mathcal{M}_{n \times p}(\mathbb{R})$.

c) $f_{A+B}(X) = (A+B) \cdot X = A \cdot X + B \cdot X = f_A(X) + f_B(X)$, pentru orice $X \in \mathcal{M}_{n \times p}(\mathbb{R})$.

d) $(f_A \circ f_B)(X) = f_A(f_B(X)) = A \cdot (B \cdot X) = (A \cdot B) \cdot X = f_{A \cdot B}(X)$, pentru orice $X \in \mathcal{M}_{n \times p}(\mathbb{R})$, deci $f_A \circ f_B = f_{A \cdot B}$.

Clasa a XI-a – M1 (matematică-informatică) 4 ore/săptămână

Unitatea de învățare: Matrice

Evaluare sumativă

**EVALUARE SUMATIVĂ
MATRICE
clasa a XI-a**

- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 45 de minute.

1. La un concurs de matematică au fost propuse spre rezolvare 24 de probleme, grupate în trei seturi a câte 8 probleme fiecare. Pentru rezolvarea unei probleme din primul set se acordă 5 puncte, pentru rezolvarea unei probleme din al doilea set se acordă 10 puncte, iar pentru una din al treilea set se acordă 15 puncte. Ana a rezolvat toate problemele din primul set, jumătate din setul al doilea și un sfert din cel de-al treilea set, iar Bogdan a rezolvat, la fiecare set, cu o problemă mai puțin decât Ana.

15p a) Transcrieți pe foaia de lucru tabelul următor, apoi completați-l cu numărul de probleme rezolvate de fiecare dintre cei doi copii.

	Setul 1	Setul 2	Setul 3
Ana			
Bogdan			

15p b) Găsiți o relație matriceală prin care să determinați punctajul obținut de Ana și de Bogdan.

15p 2. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} a & b & 1+i \\ c & d & \sqrt{2} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{C})$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ i & 1 \\ x & y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{C})$ și ${}^t B$ transpusa

matricei B . Știind că $A = {}^t B$, arătați că $\frac{x^2 + y^2}{a + b + c + d} = 2$.

15p 3. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} -13 & 0 & -26 \\ 26 & 13 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$. Determinați matricele $X, Y \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, știind că $2X + 3Y = A$ și $3X - 2Y = 2A$.

4. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$.

5p a) Calculați ${}^t A \cdot A$.

10p b) Știind că $B = {}^t A \cdot A$ și $B^3 = B \cdot B \cdot B$, determinați numărul real x pentru care $B^3 - xB = O_3$.

5. Pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ și $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ notăm $M^n = \underbrace{M \cdot M \cdot \dots \cdot M}_{\text{denori } M}$. În $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ se consideră

$$\text{matricele } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 11 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & -9 \end{pmatrix} \text{ și } C(x) = \begin{pmatrix} 1+2x & 0 & 4x \\ 0 & 1 & 0 \\ -x & 0 & 1-2x \end{pmatrix}, \text{ unde } x \text{ este număr}$$

real.

5p a) Calculați A^{2023} .

5p b) Arătați că $C(x) \cdot C(y) = C(x+y)$, pentru orice numere reale x și y .

5p c) Calculați B^n , unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

EVALUARE SUMATIVĂ
MATRICE
clasa a XI-a
Barem de corectare și de notare

1.a)	<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th></th> <th>Setul 1</th> <th>Setul 2</th> <th>Setul 3</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Ana</td> <td style="text-align: center;">8</td> <td style="text-align: center;">4</td> <td style="text-align: center;">2</td> </tr> <tr> <td>Bogdan</td> <td style="text-align: center;">7</td> <td style="text-align: center;">3</td> <td style="text-align: center;">1</td> </tr> </tbody> </table>		Setul 1	Setul 2	Setul 3	Ana	8	4	2	Bogdan	7	3	1	15p
	Setul 1	Setul 2	Setul 3											
Ana	8	4	2											
Bogdan	7	3	1											
1.b)	$\begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 7 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \cdot 5 + 4 \cdot 10 + 2 \cdot 15 \\ 7 \cdot 5 + 3 \cdot 10 + 1 \cdot 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 \\ 80 \end{pmatrix}$ <p>Ana a obținut 110 puncte, iar Bogdan 80 de puncte</p>	10p 5p												
2.	$B^t = \begin{pmatrix} 1 & i & x \\ -1 & 1 & y \end{pmatrix}$ $A = {}^tB \Leftrightarrow a=1, b=i, c=-1, d=1, x=1+i, y=\sqrt{2}$ $\frac{x^2 + y^2}{a+b+c+d} = \frac{1+2i+i^2+2}{1+i-1+1} = \frac{2+2i}{1+i} = 2$	5p 5p 5p												
3.	$\begin{cases} 2X+3Y=A & \cdot 2 \\ 3X-2Y=2A & \cdot 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4X+6Y=2A \\ 9X-6Y=6A \end{cases}, \text{ de unde obținem } 13X=8A$ $X = \frac{8}{13}A, \text{ deci } X = \begin{pmatrix} -8 & 0 & -16 \\ 16 & 8 & 0 \end{pmatrix}$ $3X-2Y=2A \Rightarrow Y = \frac{3}{2}X - A \Rightarrow Y = -\frac{1}{13}A \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	5p 5p 5p												
4.a)	${}^tA \cdot A = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} =$	2p												

	$= \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & -1 \\ -\sqrt{2} & 2 & \sqrt{2} \\ -1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$	3p
4.b)	$B^2 = 4B$ $B^3 = 16B$, deci $x=16$	5p 5p
5.a)	$A^2 = A \cdot A = O_3$ $A^{2023} = A^{2021} \cdot A^2 = A^{2021} \cdot O_3 = O_3$	2p 3p
5.b)	$C(x) = I_3 + xA$, pentru orice număr real x $C(x) \cdot C(y) = (I_3 + xA) \cdot (I_3 + yA) = I_3 + xA + yA + xyA^2 = I_3 + (x+y)A = C(x+y)$, pentru orice numere reale x și y	2p 3p
5.c)	Cum $B = C(5)$, obținem $B^2 = C(5) \cdot C(5) = C(5+5) = C(5 \cdot 2)$ Pentru $B^k = C(5k)$, obținem $B^{k+1} = B^k \cdot B = C(5k) \cdot C(5) = C(5k+5) = C(5(k+1))$ și atunci, conform metodei inducției matematice, rezultă că $B^n = C(5n)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$	2p 3p

EVALUARE SUMATIVĂ MATRICE

Matrice de specificații

Conținuturi \ Competențe de evaluat	CS 1.1	CS 2.1	CS 3.1	CS 4.1	CS 6.1	Total
Tabel de tip matriceal; înmulțirea a două matrice	1.a) (15p)	1.b) (15p)				30p
Egalitatea a două matrice; transpusa unei matrice			2. (15p)			15p
Adunarea matricelor; înmulțirea unei matrice cu un scalar; proprietăți				3. (15p)		15p
Înmulțirea matricelor; proprietăți			4.a) (5p)	4.b) (10p)		15p
Operații cu matrice pătratice; Proprietăți			5.a) (5p)		5.b) c) (10p)	15p
Total	15p	15p	25p	25p	10p	90p

Competențe de evaluat asociate testului de evaluare sumativă:

CS 1.1. Identificarea unor situații practice concrete, care necesită asocierea unui tabel de date cu reprezentarea matriceală a unui proces

CS 2.1. Asocierea unui tabel de date cu reprezentarea matriceală a unui proces

SECȚIUNEA a III-a Predare-învățare-evaluare. Recomandări și exemplificări la disciplina matematică, clasa a XI-a

CS 3.1. Aplicarea algoritmilor de calcul în situații practice

CS 4.1. Rezolvarea unor ecuații și sisteme utilizând algoritmi specifici

CS 6.1. Optimizarea rezolvării unor probleme sau situații-problemă prin alegerea unor strategii și metode adecvate (de tip algebric, vectorial, analitic, sintetic)

SECȚIUNEA a III-a Predare-învățare-evaluare. Recomandări și exemplificări la disciplina matematică, clasa a XI-a

III.1.2 Elemente de proiectare didactică – exemplificare pentru unitatea de învățare *Rolul derivatelor de ordinul I și al II-lea în studiul funcțiilor*, clasa a XI-a, programa școlară pentru matematică M2 (științe ale naturii), 3 ore/săptămână

Matematică

Clasa a XI-a – M2 (științe ale naturii), 3 ore/săptămână

Domeniul de conținut: Studiul funcțiilor cu ajutorul derivatelor

Unitatea de învățare: Rolul derivatelor de ordinul I și al II-lea în studiul funcțiilor

Exemplificare – elemente de proiectare a unității de învățare

Conținuturi (detalieri)	Competențe specifice	Activități de învățare	Resurse	Evaluare
[se menționează detalieri de conținut care explicitează anumite parcursuri]	[se precizează nr. criterial al competențelor specifice din programa școlară]	[vizate/recomandate de programa școlară sau altele adecvate pentru realizarea competențelor specifice]	[se precizează resurse de timp, de loc, material didactic, forme de organizare a clasei]	[se menționează metodele, instrumentele sau modalitățile de evaluare utilizate]
		Recapitularea noțiunilor ancoră <i>Elemente de conținut vizate:</i> <i>Calculul derivatelor de ordinul I și al II-lea; stabilirea intervalelor de monotonie și a punctelor de extrem pentru unele funcții elementare studiate anterior; determinarea punctelor critice ale unei funcții; calculul limitelor unor funcții prin metodele studiate</i>	<i>Formular Google – Fișa suport 1</i> Activitate individuală	Administrarea probei Corectarea probei Oferirea de feedback personalizat Identificarea elevilor care necesită suport remedial

SECȚIUNEA a III-a Predare-învățare-evaluare. Recomandări și exemplificări la disciplina matematică, clasa a XI-a

Conținuturi (detalieri)	Competențe specifice	Activități de învățare	Resurse	Evaluare
Lecția 1. Determinarea intervalelor de monotonie ale unei funcții	1.2	<ul style="list-style-type: none"> • Enunțarea, scrierea și înțelegerea definiției funcției crescătoare, respectiv descrescătoare pe un interval 	<ul style="list-style-type: none"> • <i>Fișa suport 2</i> – paragraful 1 Activitate frontală	Validarea și discutarea răspunsurilor oferite de elevi
	2.2	<ul style="list-style-type: none"> • Identificarea, pe un grafic dat, a intervalelor de monotonie ale funcției reprezentate • Enunțarea teoremei de caracterizare a intervalelor de monotonie cu ajutorul derivatei I a funcției • Discutarea aspectelor privind monotonia strictă a unei funcții, corelată cu semnul derivatei I 	<ul style="list-style-type: none"> • <i>Fișa suport 2</i> – paragraful 2 • <i>Fișa suport 2</i> – paragraful 3 Activitate frontală	Verificarea notițelor elevilor Evaluare prin sondaj
	5.2	<ul style="list-style-type: none"> • Probarea enunțului teoremei pentru exemple de funcții elementare studiate anterior 	<ul style="list-style-type: none"> • <i>Fișa suport 2</i> – paragraful 4 Activitate frontală	Evaluare prin sondaj Validarea și discutarea răspunsurilor oferite de elevi
	3.2	<ul style="list-style-type: none"> • Prezentarea și exemplificarea etapelor de lucru parcurse pentru stabilirea intervalelor de monotonie 	<ul style="list-style-type: none"> • <i>Fișa suport 2</i> – paragraful 5 • <i>Fișa suport 2</i> – paragraful 6 Activitate frontală Activitate pe grupe	Validarea și discutarea răspunsurilor oferite de elevi Prezentarea activității din fiecare grupă
Lecția 2. Determinarea punctelor de extrem ale unei funcții	1.2	<ul style="list-style-type: none"> • Enunțarea, scrierea și înțelegerea noțiunilor de punct de extrem local sau global al unei funcții 	<ul style="list-style-type: none"> • <i>Fișa suport 3</i> – paragraful 1 Activitate frontală	Validarea și discutarea răspunsurilor oferite de elevi Verificarea notițelor elevilor
	2.2	<ul style="list-style-type: none"> • Identificarea pe un grafic dat sau cu ajutorul proprietăților unor funcții studiate anterior a punctelor de extrem ale unei funcții 	<ul style="list-style-type: none"> • <i>Fișa suport 3</i> – paragraful 2 Activitate frontală	Evaluare prin sondaj

SECȚIUNEA a III-a Predare-învățare-evaluare. Recomandări și exemplificări la disciplina matematică, clasa a XI-a

Conținuturi (detalieri)	Competențe specifice	Activități de învățare	Resurse	Evaluare
	4.2	<ul style="list-style-type: none"> • Caracterizarea punctelor de extrem cu ajutorul derivatei de ordinul I 	<ul style="list-style-type: none"> • <i>Fișa suport 3</i> – paragraful 3 Activitate frontală 	Verificarea notițelor elevilor
	3.2	<ul style="list-style-type: none"> • Prezentarea și exemplificarea etapelor de rezolvare pentru determinarea punctelor de extrem ale unei funcții • Discutarea unor cazuri în care punctele de extrem nu sunt puncte critice în care se schimbă semnul primei derivate 	<ul style="list-style-type: none"> • <i>Fișa suport 3</i> – paragraful 4 Activitate frontală • <i>Fișa suport 3</i> – paragraful 5 Activitate pe grupe • <i>Fișa suport 3</i> – paragraful 6 Activitate frontală • <i>Fișa suport 3</i> – paragraful 7 Activitate individuală 	<p>Prezentarea activității din fiecare grupă</p> <p>Verificarea prin sondaj a rezolvărilor elevilor</p>
Lecția 3. Determinarea intervalelor de convexitate și concavitate ale unei funcții	1.2	<ul style="list-style-type: none"> • Enunțarea, scrierea și înțelegerea definiției funcției convexe, respectiv concave pe un interval 	<ul style="list-style-type: none"> • <i>Fișa suport 4</i> – paragraful 1 Activitate frontală 	Validarea și discutarea răspunsurilor oferite de elevi Verificarea notițelor elevilor
	2.2	<ul style="list-style-type: none"> • Identificarea, pe un grafic dat, a intervalelor de convexitate și concavitate ale funcției reprezentate • Enunțarea teoremei de caracterizare a intervalelor de convexitate și concavitate cu ajutorul derivatei a doua a funcției 	<ul style="list-style-type: none"> • <i>Fișa suport 4</i> – paragraful 2 Activitate frontală • <i>Fișa suport 4</i> – paragraful 3 Activitate frontală 	Evaluare prin sondaj Validarea și discutarea răspunsurilor oferite de elevi
	5.2	<ul style="list-style-type: none"> • Probarea enunțului teoremei pentru exemple de funcții elementare studiate anterior 	<ul style="list-style-type: none"> • <i>Fișa suport 4</i> – paragraful 4 Activitate frontală 	Validarea și discutarea răspunsurilor oferite de elevi
	3.2	<ul style="list-style-type: none"> • Prezentarea și exemplificarea etapelor de lucru parcurse pentru stabilirea intervalelor de convexitate și concavitate 	<ul style="list-style-type: none"> • <i>Fișa suport 4</i> – paragraful 5 Activitate frontală • <i>Fișa suport 4</i> – paragraful 6 Activitate pe grupe 	Validarea și discutarea răspunsurilor oferite de elevi Prezentarea activității din fiecare grupă

SECȚIUNEA a III-a Predare-învățare-evaluare. Recomandări și exemplificări la disciplina matematică, clasa a XI-a

Conținuturi (detalieri)	Competențe specifice	Activități de învățare	Resurse	Evaluare
Lecția 4. Aplicații – studiul variației funcțiilor cu ajutorul derivatelor	3.2	<ul style="list-style-type: none"> Reactualizarea cunoștințelor teoretice studiate în cadrul unității de învățare, necesare realizării următoarelor activități de învățare 	<ul style="list-style-type: none"> <i>Fișa suport 5</i> – paragraful 1 Activitate frontală 	Validarea și discutarea răspunsurilor oferite de elevi
	4.2	<ul style="list-style-type: none"> Demonstrarea unor inegalități Determinarea imaginii unei funcții Demonstrarea injectivității, surjectivității și bijectivității unor funcții 	<ul style="list-style-type: none"> <i>Fișa suport 5</i> – paragraful 2 Activitate frontală <i>Fișa suport 5</i> – paragraful 3 Activitate frontală <i>Fișa suport 5</i> – paragraful 4 Activitate frontală 	Verificarea notițelor elevilor Evaluare prin sondaj
Lecția 5. Probleme practice de minim și maxim	6.2	<ul style="list-style-type: none"> Prezentarea generală a situațiilor practice frecvent întâlnite în care se poate utiliza studiul funcțiilor cu ajutorul derivatelor și a reperelor generale de modelare matematică a acestor situații Rezolvarea unor probleme de minim sau maxim cu conținut algebric Rezolvarea unor probleme de minim sau maxim cu conținut geometric Rezolvarea unor probleme de minim sau maxim cu caracter practic, din alte discipline 	<ul style="list-style-type: none"> <i>Fișa suport 6</i> – paragraful 1 Activitate frontală <i>Fișa suport 6</i> – paragraful 2 Activitate frontală <i>Fișa suport 6</i> – paragraful 3 Activitate frontală <i>Fișa suport 6</i> – paragraful 4 Activitate frontală 	Validarea și discutarea răspunsurilor oferite de elevi Verificarea notițelor elevilor Evaluare prin sondaj
Lecția 6. Evaluare sumativă	1.2 2.2 3.2 4.2 5.2 6.2	<ul style="list-style-type: none"> Evaluare sumativă 	<ul style="list-style-type: none"> <i>Test de evaluare/Google forms</i> Activitate individuală 	Administrarea probei

SECȚIUNEA a III-a Predare-învățare-evaluare. Recomandări și exemplificări la disciplina matematică, clasa a XI-a

Conținuturi (detalieri)	Competențe specifice	Activități de învățare	Resurse	Evaluare
Lecția 7. Activitate remedială și/sau de progres	1.2 2.2 3.2 4.2 5.2 6.2	<ul style="list-style-type: none">• Discutarea rezolvării testului de evaluare• Activitate remedială și/sau de progres	<ul style="list-style-type: none">• Activitate frontală• Activitate în perechi	Corectarea probei Verificare și feedback perechi

Competențe specifice

CS.1.2 Caracterizarea unor funcții utilizând reprezentarea geometrică a unor cazuri particulare

CS.2.2 Interpretarea unor proprietăți ale unor funcții cu ajutorul reprezentărilor grafice

CS.3.2 Aplicarea unor algoritmi specifici calculului diferențial în rezolvarea unor probleme

CS.4.2 Exprimarea cu ajutorul noțiunilor de limită, continuitate, derivabilitate, monotonie, a unor proprietăți cantitative și calitative ale unei funcții

CS.5.2 Utilizarea reprezentării grafice a unei funcții pentru verificarea unor rezultate și pentru identificarea unor proprietăți

CS.6.2 Determinarea unor optimuri situaționale prin aplicarea calculului diferențial în probleme practice

Conținuturi

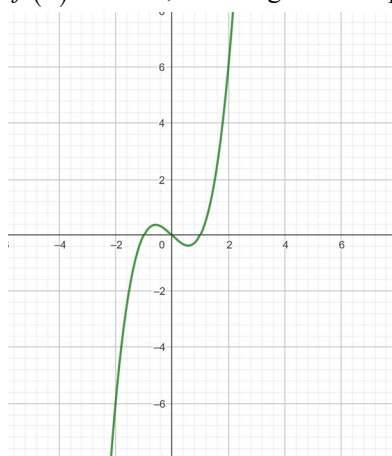
Studiul funcțiilor cu ajutorul derivatelor - Rolul derivatelor de ordinul I și al II-lea în studiul funcțiilor: monotonie, puncte de extrem, concavitate, convexitate

Clasa a XI-a - M2 (științe ale naturii) 3 ore/săptămână
Unitatea de învățare: Rolul derivatelor de ordinul I și al II-lea în studiul funcțiilor
Evaluare inițială

Fișa suport 1 - EVALUARE INIȚIALĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul de lucru efectiv este de 20 de minute.
- Pentru fiecare item, dintre cele patru variante de răspuns doar o variantă este corectă.
- Încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect.

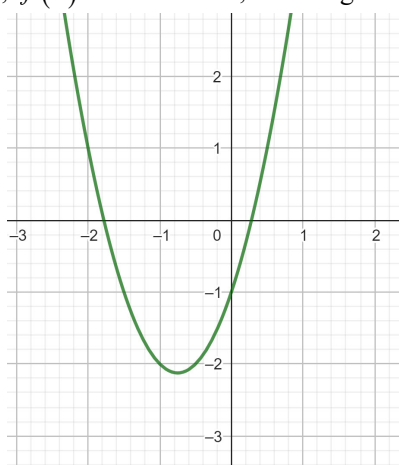
10p 1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - x$, al cărei grafic este prezentat mai jos.



Numărul soluțiilor reale ale ecuației este egal cu:

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

10p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$, al cărei grafic este prezentat mai jos.



Numărul punctelor de minim ale funcției este egal cu:

- A. 3 B. 2 C. 1 D. 0

10p	3. Știind că $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4x^3 - 2x + 1$, numărul $f'(0)$ este egal cu:
	A. -2 B. 2 C. 10 D. 0
10p	4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{4x^2 + 2}$ este egală cu:
	A. 1 B. $\frac{3}{4}$ C. 0 D. $-\frac{1}{2}$
10p	5. Știind că $f: (-2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \sqrt{x+2}$, soluția ecuației $f'(x) = 0$ este:
	A. $-\frac{7}{4}$ B. $\frac{7}{4}$ C. $-\frac{3}{4}$ D. 1
10p	6. Derivata funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ este egală cu:
	A. $\frac{2(1-x)(1+x)}{(x^2 + 1)^2}$ B. $\frac{2(1-x)(1+x)}{x^2 + 1}$ C. $\frac{2(1+x)}{(x^2 + 1)^2}$ D. $\frac{2(1-x)}{(x^2 + 1)^2}$
10p	7. Știind că $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = xe^x$, soluția ecuației $f''(x) = 0$ este:
	A. 1 B. -1 C. 2 D. -2
10p	8. Dacă $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \operatorname{arctg}x}{2023x}$, atunci L este egal cu:
	A. $\frac{1}{2023}$ B. $\frac{2}{2023}$ C. 0 D. .1.
10p	9. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} ax + b, & \text{dacă } x < 1 \\ \sqrt{x}, & \text{dacă } x \geq 1 \end{cases}$, unde a și b sunt numere reale. Știind că funcția f este derivabilă pe \mathbb{R} , numărul $a + b$ este egal cu:
	A. 1 B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 0

Barem de corectare

1	2	3	4	5	6	7	8	9
D	C	A	B	A	A	D	B	A
10p	10p	10p	10p	10p	10p	10p	10p	10p

**Matrice de specificații
Evaluare inițială**

Competențe de evaluat Conținuturi	XI.CS.1.2	XI.CS.2.2	XI.CS.3.2	XI.CS.4.2	XI.CS.5.2	XI.CS.6.2	Total
Limite de funcții	1 (10p)	2 (10p)		4 (10p)	7 (10p)	8 (10p)	50p
Funcții continue						9 (10p)	10p
Funcții derivabile			3 (10p)	5 (10p)	6 (10p)		30p
Total	10p	10p	10p	20p	20p	20p	90p

Competențe de evaluat asociate testului de evaluare inițială în cadrul unității de învățare:

XI.CS.1.2 Caracterizarea unor funcții utilizând reprezentarea geometrică a unor cazuri particular

XI.CS.2.2 Interpretarea unor proprietăți ale unor funcții cu ajutorul reprezentărilor grafice

XI.CS.3.2 Aplicarea unor algoritmi specifici calculului diferențial în rezolvarea unor probleme

XI.CS.4.2 Exprimarea cu ajutorul noțiunilor de limită, continuitate, derivabilitate, monotonie, a unor proprietăți cantitative și calitative ale unei funcții

XI.CS.5.2 Utilizarea reprezentării grafice a unei funcții pentru verificarea unor rezultate și pentru identificarea unor proprietăți

XI.CS.6.2 Determinarea unor optimuri situaționale prin aplicarea calculului diferențial în probleme practice

Evaluarea inițială pentru unitatea de învățare Rolul derivatelor de ordinul I și al II-lea în studiul funcțiilor: monotonie, puncte de extrem, concavitate, convexitate poate fi accesată online la adresa

<https://forms.gle/foLBks4F1LZfgz1b8>

Clasa a XI-a - M2 (științe ale naturii) 3 ore/săptămână

Unitatea de învățare: Rolul derivatelor de ordinul I și al II-lea în studiul funcțiilor

Lecția 1: Determinarea intervalelor de monotonie a unei funcții

Fișa suport 2

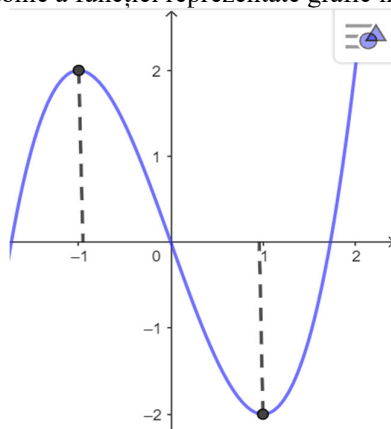
1. Definiția funcției monotone pe un interval:

Se consideră o funcție $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, unde I este un interval de numere reale.

Funcția f este crescătoare pe intervalul I dacă pentru orice $x_1, x_2 \in I$, cu $x_1 < x_2$, avem $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Funcția f este descrescătoare pe intervalul I dacă pentru orice $x_1, x_2 \in I$, cu $x_1 < x_2$, avem $f(x_1) \geq f(x_2)$.

2. Identificați intervalele de monotonie a funcției reprezentate grafic în desenul următor:



(Desenul conține reprezentarea grafică a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x$ realizat cu ajutorul aplicației Geogebra - <https://www.geogebra.org/download?lang=en>)

3. Teoremă: Se consideră $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă pe intervalul I . Atunci:

a) funcția f este crescătoare pe $I \Leftrightarrow f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in I$;

b) funcția f este descrescătoare pe $I \Leftrightarrow f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in I$.

Observații: a) Dacă funcția f este derivabilă pe intervalul I și $f'(x) > 0$ pentru orice $x \in I$, atunci funcția f este strict crescătoare pe intervalul I , iar dacă $f'(x) < 0$ pentru orice $x \in I$, atunci funcția f este strict descrescătoare pe intervalul I .

b) Reciprocele afirmațiilor de la punctul a) nu sunt întotdeauna adevărate: există funcții strict monotone a căror derivată nu este strict pozitivă sau strict negativă. Un exemplu în acest sens este funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ care este strict crescătoare pe \mathbb{R} (ceea ce poate fi observat și prin lectură grafică), dar $f'(x) = 3x^2 \geq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ și observăm că derivata sa se anulează în punctul $x = 0$.

4. Arătați, utilizând teorema de la punctul 3., că:

a) funcția exponențială cu baza supraunitară este strict crescătoare pe întreg domeniul de definiție;

b) funcția logaritmică cu baza subunitară este strict descrescătoare pe întreg domeniul de definiție;

c) funcția de gradul al doilea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, este descrescătoare pe $(-\infty, 0]$ și crescătoare pe $[0, +\infty)$.

Comparați rezultatele obținute astfel cu informațiile privind monotonia rezultate din lectura grafică a reprezentărilor celor trei funcții, utilizând aplicații specifice (de exemplu <http://www.mathe-fa.de/ro>, Desmos Graphing Calculator - <https://www.desmos.com/calculator>, Mathway - <https://www.mathway.com/Graph>, GeoGebra, etc.).

SECȚIUNEA a III-a Predare-învățare-evaluare. Recomandări și exemplificări la disciplina matematică, clasa a XI-a

5. Etapele stabilirii intervalelor de monotonie pentru o funcție derivabilă f :

- (1) se calculează derivata f' ;
- (2) se determină punctele critice ale funcției, rezolvând ecuația $f'(x) = 0$;
- (3) se determină semnul funcției f' pe fiecare interval pe care aceasta nu se anulează;
- (4) se stabilesc intervalele de monotonie ale funcției f , în funcție de semnul derivatei f' .

Pentru organizarea optimă a informațiilor din cele patru etape de lucru, se poate alcătui tabelul de variație a funcției.

Aceste etape și alcătuirea tabelului de variație se realizează pentru funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x$, al cărei grafic a fost analizat la punctul 2. din fișa de lucru.

6. Stabiliți intervalele de monotonie pentru fiecare dintre funcțiile următoare:

a) $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$;

b) $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \ln x$.

Verificați rezultatele obținute cu ajutorul reprezentărilor grafice ale fiecăreia dintre funcțiilor de mai sus, realizate cu o aplicație pentru computer sau smartphone (de exemplu <http://www.mathe-fa.de/ro>, *Desmos Graphing Calculator* - <https://www.desmos.com/calculator>, *Mathway* - <https://www.mathway.com/Graph>, *GeoGebra* etc.).

Clasa a XI-a - M2 (științe ale naturii) 3 ore/săptămână

Unitatea de învățare: Rolul derivatelor de ordinul I și al II-lea în studiul funcțiilor

Lecția 2: Determinarea punctelor de extrem ale unei funcții

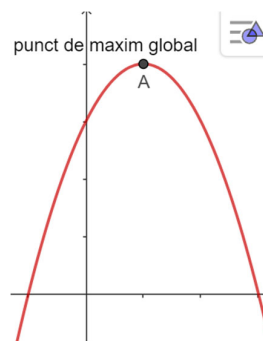
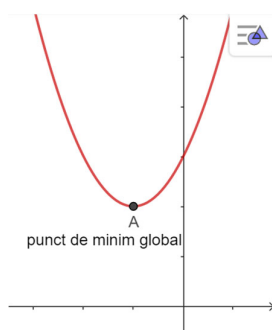
Fișa suport 3

1. Se consideră o funcție $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, unde $D \subset \mathbb{R}$.

Definiții: 1) Puncte de extrem global

1.a) Un punct $x_0 \in D$ se numește punct de maxim absolut/global al funcției f dacă $f(x) \leq f(x_0)$, pentru orice $x \in D$.

1.b) Un punct $x_0 \in D$ se numește punct de minim absolut/global al funcției f dacă $f(x) \geq f(x_0)$, pentru orice $x \in D$.



1.c) Un punct de minim sau maxim absolut/global se numește punct de extrem absolut/global al funcției.

1.d) Valorile funcției în punctele sale de extrem absolut, se numesc extremele absolute/globale ale funcției.

2) Puncte de extrem local

2.a) Un punct $a \in D$ se numește punct de maxim local (maxim relativ) al funcției f dacă există o vecinătate V a lui a astfel încât $f(x) \leq f(a)$, pentru orice $x \in V \cap D$.

Numărul $f(a)$ se numește valoarea maximă locală sau maximul local ori relativ al funcției.

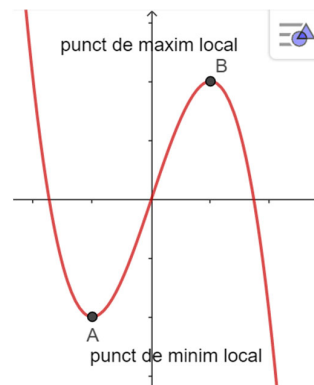
2.b) Un punct $b \in D$ se numește punct de minim local (minim relativ) al funcției f dacă există o vecinătate V a lui b astfel încât $f(x) \geq f(b)$, pentru orice $x \in V \cap D$.

Numărul $f(b)$ se numește valoarea minimă locală sau minimul local ori relativ al funcției.

2.c) Un punct de minim local sau maxim local se numește punct de extrem local al funcției.

Valorile funcției în punctele sale de extrem local se numesc extremele locale ale funcției.

2.d) Prin punctele de extrem ale unei funcții înțelegem punctele de extrem local și punctele de extrem global ale funcției respective.



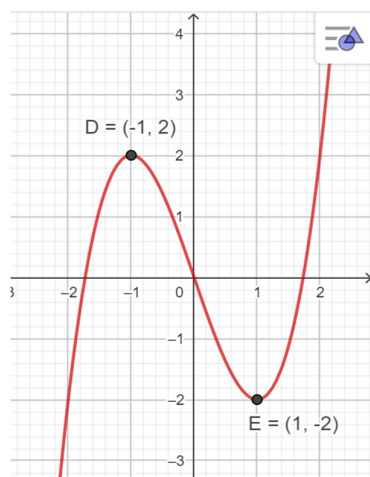
Observație: Se consideră funcția $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, continuă pe I și x_0 un punct din interiorul intervalului I .

1) Dacă, pe intervalului I , funcția f este strict crescătoare la stânga lui x_0 (pe un interval (a, x_0)) și strict descrescătoare la dreapta lui x_0 (pe un interval (x_0, b)), atunci x_0 este punct de maxim local al funcției f .

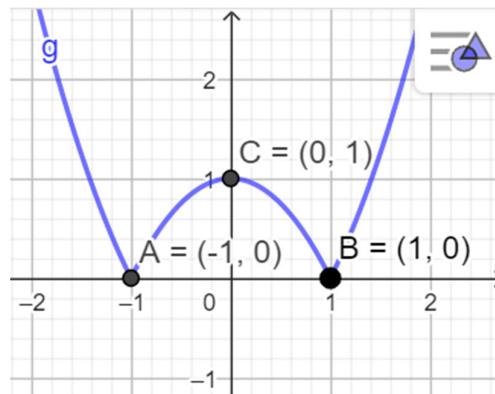
2) Dacă, pe intervalului I , funcția f este strict descrescătoare la stânga lui x_0 (pe un interval (a, x_0)) și strict crescătoare la dreapta lui x_0 (pe un interval (x_0, b)), atunci x_0 este punct de minim local al funcției f .

SECȚIUNEA a III-a Predare-învățare-evaluare. Recomandări și exemplificări la disciplina matematică, clasa a XI-a

2. a) Identificați punctele de extrem local și valorile extreme locale ale funcțiilor reprezentate grafic în desenele următoare:



$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 3x$$



$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = |x^2 - 1|$$

(Desenele au fost realizate cu ajutorul aplicației Geogebra <https://www.geogebra.org/download?lang=en>)

b) Stabiliți valoarea de adevăr a fiecăreia dintre următoarele propoziții:

p_1 : „Punctul $x = -1$ este punct de minim global al funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 2x + 5$.”

p_2 : „Punctul $x = 1$ este punct de minim global al funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x^2 + 2x - 5$.”

p_3 : „Valoarea maximă globală a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 2x + 5$ este egală cu 4.”

p_4 : „Valoarea maximă globală a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x^2 + 2x - 5$ este egală cu -4 .”

3. Pentru caracterizarea punctelor de extrem ale unei funcții cu ajutorul derivatei se utilizează următoarele rezultate:

A. Dacă funcția $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ este derivabilă într-un punct de extrem x_0 , situat în interiorul intervalului I , atunci $f'(x_0) = 0$.

B. Se consideră funcția $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabilă pe intervalul I și x_0 un punct din interiorul intervalului I .

1) Dacă $f'(x) > 0$ pentru orice $x \in I, x < x_0$ și $f'(x) < 0$ pentru orice $x \in I, x > x_0$, atunci x_0 este un punct de maxim local al funcției f .

În tabelul de variație a funcției, punctul de maxim caracterizat astfel apare în configurații de tipul următor:

x	x_0		
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗	$f(x_0)$	↘

2) Dacă $f'(x) < 0$ pentru orice $x \in I, x < x_0$ și $f'(x) > 0$ pentru orice $x \in I, x > x_0$, atunci x_0 este un punct de minim local al funcției f .

În tabelul de variație al funcției, punctul de minim caracterizat astfel apare în configurații de tipul următor:

x	x_0		
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	$f(x_0)$	↗

Observație: Nu orice zerou al derivatei (soluție a ecuației $f'(x)=0$) este punct de extrem al funcției, așa cum reiese din exemplul următor:

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$. Funcția este derivabilă pe \mathbb{R} , $f'(x) = 3x^2$ și se anulează în $x_0 = 0$, dar acesta nu este punct de extrem al funcției, funcția fiind strict crescătoare pe \mathbb{R} .

4. Etapele determinării punctelor de extrem local ale unei funcții derivabile f , selectate dintre punctele critice ale acesteia:

- (1) se calculează derivata f' ;
- (2) se determină punctele critice ale funcției, rezolvând ecuația $f'(x) = 0$;
- (3) se determină semnul funcției f' pe fiecare interval pe care aceasta nu se anulează;
- (4) se stabilesc intervalele de monotonie a funcției f , în funcție de semnul derivatei f' ;
- (5) se identifică configurațiile specifice punctelor de minim sau maxim (conform punctului **B.** de la paragraful **3.**) și se scriu punctele de extrem.

Pentru organizarea optimă a informațiilor din cele cinci etape de lucru, se poate alcătui tabelul de variație a funcției.

Aceste etape și alcătuirea tabelului de variație se realizează pentru funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x$ al cărei grafic a fost analizat la punctul **2.a)** din fișa suport.

5.

5.1 Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$.

a) Determinați punctele de extrem ale funcției f .

b) Precizați valorile extreme ale funcției f .

5.2 Arătați că funcția $f: (2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x-2}$ nu are niciun punct de extrem.

6. Puncte de extrem ale unei funcții care nu se regăsesc printre zerourile derivatei funcției:

1) Se consideră o funcție $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ și $x_0 \in I$, f derivabilă pe $I \setminus \{x_0\}$ și continuă în punctul x_0 .

1.a) Dacă $f'(x) > 0$ pentru orice $x \in I$, $x < x_0$ și $f'(x) < 0$ pentru $x \in I$, $x > x_0$, atunci x_0 este un punct de maxim local al funcției f .

În tabelul de variație a funcției, punctul de maxim caracterizat astfel apare în configurații de tipul următor:

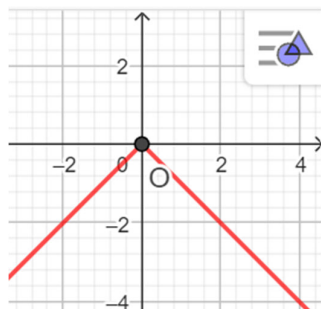
x	x_0		
$f'(x)$	+		-
$f(x)$	↗	$f(x_0)$	↘

Exemplu: Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -|x|$ este derivabilă pe \mathbb{R}^* și este continuă în punctul $x_0 = 0$. Tabelul său de variație este următorul:

SECȚIUNEA a III-a Predare-învățare-evaluare. Recomandări și exemplificări la disciplina matematică, clasa a XI-a

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+ + +		- - -
$f(x)$	\nearrow	0	\searrow

Punctul $x_0 = 0$ este punct de maxim global, iar $f(0) = 0$ este valoarea maximă a funcției.



1.b) Dacă $f'(x) < 0$ pentru orice $x \in I, x < x_0$ și $f'(x) > 0$ pentru orice $x \in I, x > x_0$, atunci x_0 este un punct de minim local al funcției f .

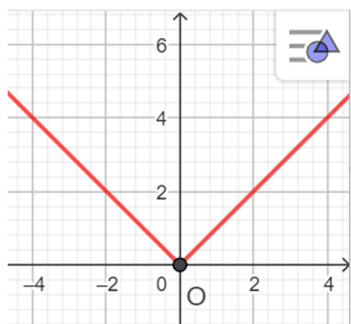
În tabelul de variație al funcției, punctul de minim caracterizat astfel apare în configurații de tipul următor:

x	x_0	
$f'(x)$	-	+
$f(x)$	\searrow	\nearrow

Exemplu: Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x|$ este derivabilă pe \mathbb{R}^* și este continuă în punctul $x_0 = 0$. Tabelul său de variație este următorul:

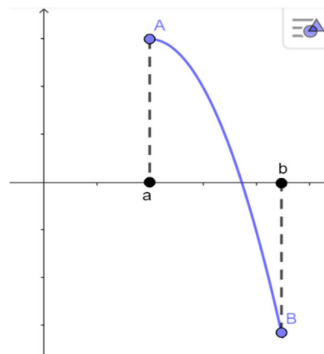
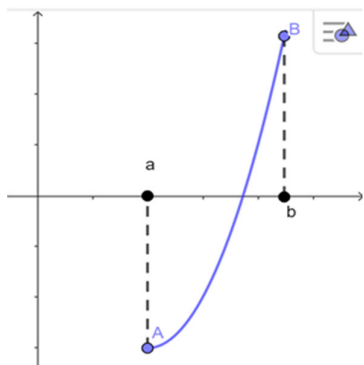
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	- - -		+ + +
$f(x)$	\searrow	0	\nearrow

Punctul $x_0 = 0$ este punct de minim global, iar $f(0) = 0$ este valoarea minimă a funcției.

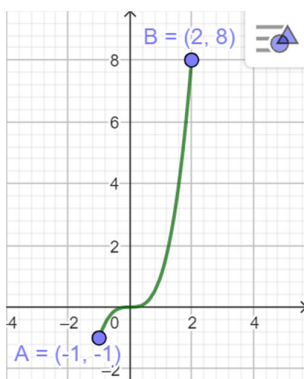


2) Dacă o $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție derivabilă și derivata ei are semn constant pe $[a, b]$, atunci capetele

intervalului $(a$ și $b)$ sunt puncte de extrem ale funcției:



Exemplu: Funcția derivabilă $f : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2 \geq 0$, deci $x = -1$ este punct de minim, iar valoarea minimă este $f(-1) = -1$ și $x = 2$ este punct de maxim, iar valoarea maximă este $f(2) = 8$.



7. Se consideră funcția $f : [-2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 2$, al cărei tabel de variație este prezentat mai jos:

x	-2	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	- - -	0	+	+
$f(x)$	14	-3	-2	

Stabiliți valoarea de adevăr a fiecăreia dintre următoarele propoziții:

- p_1 : „Punctele de extrem ale funcției f sunt $x = -1$ și $x = 0$.”
- p_2 : „Punctele de extrem ale funcției f sunt $x = -2$ și $x = -1$.”
- p_3 : „Punctul $x = -1$ este punct de minim al funcției f .”
- p_4 : „Punctul $x = 0$ este punct de maxim al funcției f .”
- p_5 : „Punctul $x = -2$ este punct de maxim al funcției f .”
- p_6 : „-3 este valoare minimă a funcției f .”
- p_7 : „14 este valoare minimă a funcției f .”

Clasa a XI-a - M2 (științe ale naturii) 3 ore/săptămână

Unitatea de învățare: Rolul derivatelor de ordinul I și al II-lea în studiul funcțiilor

Lecția 3: Determinarea intervalelor de convexitate și concavitate ale unei funcții

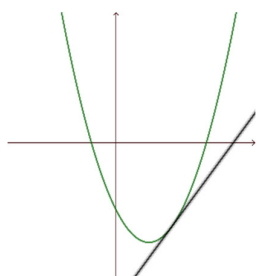
Fișa suport 4

1. Definiția funcției convexe/concave pe un interval:

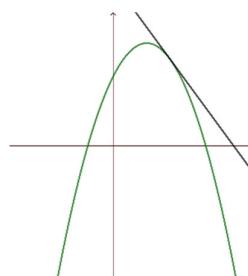
Se consideră o funcție $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, unde I este un interval de numere reale.

Funcția f se numește convexă pe intervalul I dacă tangenta în orice punct al graficului funcției f este situată sub acest grafic.

Funcția f se numește concavă pe intervalul I dacă tangenta în orice punct al graficului funcției f este situată deasupra acestui grafic.



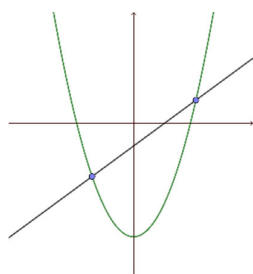
funcție convexă



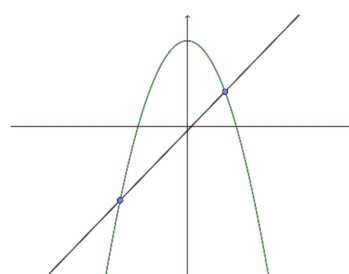
funcție concavă

Observație: Funcția f este convexă dacă orice porțiune de grafic dintre două puncte ale graficului este situată sub coarda care unește cele două puncte.

Funcția f este concavă dacă orice porțiune de grafic dintre două puncte ale graficului este situată deasupra coardei care unește cele două puncte.

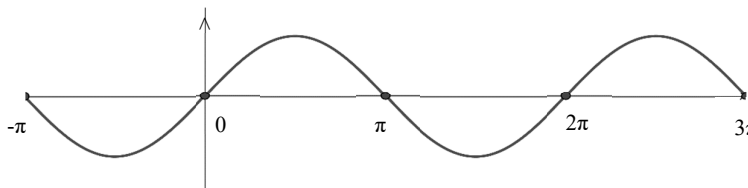


funcție convexă



funcție concavă

2. Identificați intervalele de convexitate/concavitate ale funcției reprezentate grafic în desenul următor:



(Desenul conține reprezentarea grafică a funcției $f : [-\pi, 3\pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ și este realizat cu ajutorul aplicației Geogebra - <https://www.geogebra.org/download?lang=en>)

SECȚIUNEA a III-a Predare-învățare-evaluare. Recomandări și exemplificări la disciplina matematică, clasa a XI-a

3. Teoremă: Se consideră $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție de două ori derivabilă pe intervalul I . Atunci:

- a) funcția f este convexă pe intervalul $I \Leftrightarrow f''(x) \geq 0$, pentru orice $x \in I$;
- b) funcția f este concavă pe intervalul $I \Leftrightarrow f''(x) \leq 0$, pentru orice $x \in I$.

4. a) Arătați că funcția exponențială este convexă pe întreg domeniul de definiție.

b) Arătați că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ este concavă pe intervalul $(-\infty, 0)$ și convexă pe intervalul $(0, +\infty)$.

c) Arătați că funcția $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ este concavă pe intervalul $(0, +\infty)$.

5. Etapele stabilirii intervalelor de convexitate și concavitate pentru o funcție de două ori derivabilă f :

- (1) se calculează derivata f' ;
- (2) se calculează derivata a doua f'' ;
- (3) se rezolvă ecuația $f''(x) = 0$;
- (4) se determină semnul funcției f'' pe fiecare interval pe care aceasta nu se anulează;
- (5) se stabilesc intervalele de convexitate și concavitate ale funcției f în funcție de semnul derivatei a doua f'' .

Pentru organizarea optimă a informațiilor din cele cinci etape de lucru, se alcătuieste un tabel de variație (de convexitate și concavitate) al funcției.

Aceste etape și alcătuirea tabelului se realizează pentru funcția $f: [-\pi, 3\pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ al cărei grafic a fost analizat la punctul **2.** din fișa de lucru.

6. a) Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 6x + 5$. Determinați intervalele de convexitate și concavitate a funcției f .

b) Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 - 4x + 5) \cdot e^x$. Determinați intervalele de convexitate și concavitate a funcției f .

Verificați rezultatele obținute cu ajutorul reprezentărilor grafice ale funcțiilor de mai sus, realizate cu o aplicație pentru computer sau smartphone (de exemplu <http://www.mathe-fa.de/ro>, Desmos Graphing Calculator - <https://www.desmos.com/calculator>, Mathway - <https://www.mathway.com/Graph>, GeoGebra etc.).

Clasa a XI-a - M2 (științe ale naturii) 3 ore/săptămână

Unitatea de învățare: Rolul derivatelor de ordinul I și al II-lea în studiul funcțiilor

Lecția 4: Aplicații – studiul variației funcțiilor cu ajutorul derivatelor

Fișa suport 5

1. Sinteză noțiuni teoretice

Teoremă: Se consideră I un interval de numere reale și $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă. Atunci:

- a) funcția f este crescătoare dacă și numai dacă $f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in I$;
- b) funcția f este descrescătoare dacă și numai dacă $f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in I$;
- c) dacă $f'(x) > 0$, pentru orice $x \in I$, atunci funcția f este strict crescătoare;
- d) dacă $f'(x) < 0$, pentru orice $x \in I$, atunci funcția f este strict descrescătoare.

Teorema anterioară permite realizarea tabelului de variație a unei funcții derivabile, în care se pot vizualiza intervalele de monotonie a funcției, punctele de extrem local și valorile extreme ale acesteia, mulțimea valorilor funcției, stabilirea unor inegalități, determinarea numărului soluțiilor unei ecuații.

Etapile realizării tabelului de variație a unei funcții derivabile:

- (1) se determină domeniul maxim de definiție (dacă nu este specificat);
- (2) se calculează derivata f' și domeniul de definiție al acesteia;
- (3) se determină soluțiile ecuației $f'(x) = 0$;
- (4) se determină semnul funcției f' pe fiecare interval pe care aceasta nu se anulează;
- (5) se stabilesc intervalele de monotonie a funcției f , utilizând semnul derivatei f' ;
- (6) se alcătuiește tabelul de variație;
- (7) se citesc din tabel informații referitoare la intervalele de monotonie a funcției, punctele de extrem local și valorile extreme ale acesteia (care sunt utile pentru determinarea imaginii funcției, stabilirea unor inegalități, determinarea numărului soluțiilor unei ecuații, în funcție de cerința problemei).

2. Demonstrarea unei inegalități de forma $f(x) \geq g(x)$, pentru orice $x \in I$, unde I este un interval de numere reale

Pentru demonstrarea inegalității, se consideră funcția $h: I \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) - g(x)$ și se studiază variația funcției h (se determină intervalele de monotonie, puncte și valori de extrem și/sau limite în anumite puncte semnificative).

Exemplul 1: Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \arctg x$.

- a) Arătați că $f(x) \leq g(x)$, pentru orice $x \in [0, +\infty)$.
- b) Verificați inegalitatea cu ajutorul reprezentărilor grafice ale funcțiilor f și g realizate cu ajutorul unei aplicații pentru computer sau smartphone (de exemplu <http://www.mathe-fa.de/ro>, *Desmos Graphing Calculator* - <https://www.desmos.com/calculator>, *Mathway* - <https://www.mathway.com/Graph>, *GeoGebra*, etc.).

3. Determinarea imaginii unei funcții

Imaginea unei funcții numerice $f: A \rightarrow B$, cu $A, B \subset \mathbb{R}$, reprezintă submulțimea mulțimii de valori B alcătuită din toate imaginile, prin funcția f , ale elementelor lui A .

$$\text{Im } f = f(A) = \{y \in B \mid \exists x \in A \text{ astfel încât } f(x) = y\}$$

Pentru determinarea imaginii unei funcții derivabile pe un interval se utilizează tabelul de variație a funcției - valorile extreme ale funcției (și/sau, eventual, limite ale funcției în anumite puncte) folosesc la determinarea imaginii funcției (care, fiind derivabilă, este și continuă).

Exemplul 2: Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$.

- a) Utilizând tabelul de variație a funcției, determinați imaginea funcției f .
- b) Determinați imaginea funcției f , lecturând reprezentarea grafică a acestei funcții - utilizați aplicații digitale specifice pentru vizualizarea reprezentării grafice (de exemplu, puteți folosi facilitatea „Asistentul pentru matematică în OneNote” disponibilă doar pe OneNote pentru web sau OneNote pentru Windows 10. Trebuie să aveți un abonament Microsoft 365 valid. Dacă sunteți abonat Microsoft 365, asigurați-vă că aveți cea mai recentă versiune de Office).

4. Demonstrarea injectivității, surjectivității și bijectivității unor funcții

Funcția injectivă: Se consideră funcția $f: A \rightarrow B$, cu $A, B \subset \mathbb{R}$. Funcția f se numește **injectivă** dacă pentru orice x_1 și x_2 din A , cu $x_1 \neq x_2$, rezultă că $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Proprietăți:

1. Orice funcție strict monotonă este injectivă.
2. Funcția $f: A \rightarrow B$ este injectivă dacă orice paralelă la axa Ox , dusă printr-un punct al codomeniului, $y = b \in B$, intersectează graficul în *cel mult* un punct. În caz contrar, funcția f nu este injectivă.

Funcția surjectivă: Se consideră funcția $f: A \rightarrow B$, cu $A, B \subset \mathbb{R}$. Funcția f se numește **surjectivă** dacă pentru orice y din codomeniu, există un x în domeniul de definiție astfel încât $y = f(x)$.

Proprietăți:

1. Funcția $f: A \rightarrow B$ este surjectivă dacă și numai dacă $\text{Im}f = B$.
2. Funcția $f: A \rightarrow B$ este surjectivă dacă orice paralelă la axa Ox , dusă printr-un punct al codomeniului $y = b \in B$, intersectează graficul în *cel puțin* un punct (dacă o astfel de paralelă la Ox nu intersectează graficul în niciun punct, atunci f nu este surjectivă).

Funcția bijectivă: Se consideră funcția $f: A \rightarrow B$, $A, B \subset \mathbb{R}$. Funcția f se numește **bijectivă** dacă este atât injectivă, cât și surjectivă.

Proprietăți:

1. Funcția $f: A \rightarrow B$ este bijectivă dacă pentru orice $y \in B$, ecuația $f(x) = y$ are exact o soluție în A .
2. Funcția $f: A \rightarrow B$ este bijectivă dacă orice paralelă la axa Ox , dusă printr-un punct al codomeniului, $y = b \in B$, intersectează graficul funcției în *exact* un punct.

Exemplul 3: Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

- a) Studiați injectivitatea și surjectivitatea acestei funcții, folosind proprietățile derivatei întâi a funcției.
- b) Studiați bijectivitatea acestei funcții folosind reprezentarea grafică a funcției f realizată cu o aplicație pentru computer sau smartphone.

Clasa a XI-a - M2 (științe ale naturii) 3 ore/săptămână

Unitatea de învățare: Rolul derivatelor de ordinul I și al II-lea în studiul funcțiilor

Lecția 5: Probleme practice de minim și maxim

Fișa suport 6

1. Considerații generale: Numeroase probleme din domeniul științific (matematică, fizică, astronomie etc.), precum și din viața reală operează cu mărimi variabile pentru care se pot calcula valori maxime sau minime. Exemple: maximul sau minimul unei lungimi, al unei arii, al unui volum, al rezultantei unei forțe etc.

Pentru a determina valoarea maximă sau minimă a unei mărimi se procedează astfel:

- se modelează aceasta printr-o funcție (se exprimă dependența mărimii de calculat de o altă mărime);
- se studiază variația funcției obținute cu ajutorul derivatei.

2. Probleme de minim/maxim cu conținut algebric

Determinați valoarea maximă a diferenței dintre un număr real pozitiv și cubul său.

Indicație:

Se notează $d(x) = x - x^3$, unde $x \in (0, +\infty)$ și se alcătuieste tabelul de variație a funcției d .

3. Probleme de minim/maxim cu conținut geometric

Problema 1: Determinați lungimile catetelor triunghiului dreptunghic cu ipotenuza de lungime a care are perimetrul maxim.

Indicație:

Se notează cu x lungimea uneia dintre catete și perimetrul este $p(x) = a + x + \sqrt{a^2 - x^2}$, unde $x \in (0, a)$.

Problema 2: Dintr-un carton dreptunghiular cu dimensiunile de 77 cm și 32 cm, se va confecționa o cutie fără capac, prin decuparea a patru pătrate de laturi egale, câte unul din fiecare colț al dreptunghiului. Care este latura pătratelor decupate, astfel încât din cartonul rămas să se obțină o cutie cu volum maxim?

4. Probleme de minim/maxim din alte discipline

O fântână arteziană încastrată în paviment lansează spoturi de apă cu viteza $v_0 = 20\text{m/s}$. Legea de mișcare a picăturilor de apă este $h(t) = v_0 \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2}$, unde $h(t)$ reprezintă înălțimea la care se găsesc picăturile de apă după t secunde de la lansare.

a) După cât timp apa revine la nivelul solului?

b) Care este înălțimea maximă la care pot ajunge spoturile de apă? (se neglijează frecarea cu aerul, iar accelerația gravitațională se aproximează $g = 10$).

Recomandări pentru profesor – Fișe de lucru

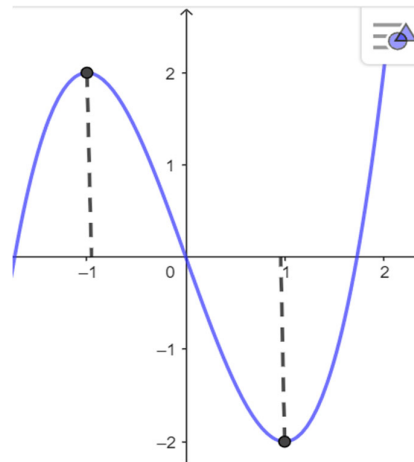
Fișele suport sunt concepute astfel încât să susțină integral lecțiile prevăzute în proiectarea unității de învățare. Fiecare activitate de învățare din cadrul lecțiilor are un paragraf dedicat în fișa suport, fie cu caracter teoretic, fie aplicativ.

Pentru înțelegerea noțiunilor studiate în cadrul unității de învățare se utilizează frecvent elemente de lectură grafică și conexiuni cu proprietăți ale unor funcții elementare studiate în clasele anterioare.

Conținutul fișelor suport alocate activităților de învățare recomandate în proiectarea unității au ca obiectiv formarea și consolidarea competențelor prevăzute de programa școlară. Aceste competențe se regăsesc în printre cele evaluate în cadrul examenului de bacalaureat, sunt necesare pentru rezolvarea multor aplicații cu caracter practic și sunt necesare pentru parcurgerea programei de matematică pentru clasa a XII-a.

Rezolvare - Fișa suport 2

2. Identificați intervalele de monotonie a funcției reprezentate grafic în desenul următor:



Rezolvare: Analizând reprezentarea grafică a funcției f , observăm că funcția este crescătoare pe $(-\infty, -1]$, descrescătoare pe $[-1, 1]$ și crescătoare pe $[1, +\infty)$.

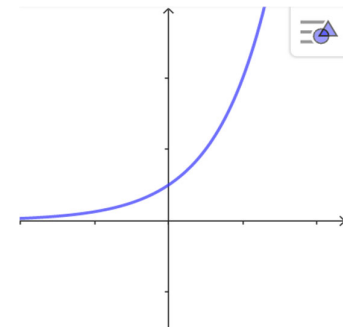
4. Arătați, utilizând teorema de la punctul 3., că:

- a) funcția exponențială cu baza supraunitară este strict crescătoare pe întreg domeniul de definiție;
- b) funcția logaritmică cu baza subunitară este strict descrescătoare pe întreg domeniul de definiție;
- c) funcția de gradul al doilea, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, este descrescătoare pe $(-\infty, 0]$ și crescătoare pe $[0, +\infty)$.
- d) Comparați rezultatele obținute astfel cu informațiile privind monotonia rezultate din lectura grafică a reprezentărilor celor trei funcții, utilizând aplicații specifice.

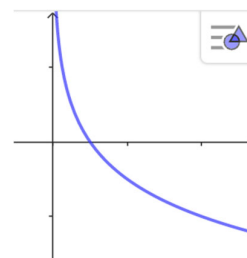
Rezolvare: a) Funcția exponențială cu baza supraunitară este de forma $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$, unde $a \in (1, +\infty)$ este fixat. Din proprietățile funcțiilor elementare studiate în clasa a X-a, se cunoaște faptul că această funcție este strict crescătoare pe \mathbb{R} .

Această funcție este derivabilă pe domeniul de definiție și $f'(x) = a^x \ln a$.

Cum $a \in (1, +\infty)$, se obține $a^x > 0$ și $\ln a > 0$, deci $f'(x) > 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Prin urmare, f este strict crescătoare pe \mathbb{R} .

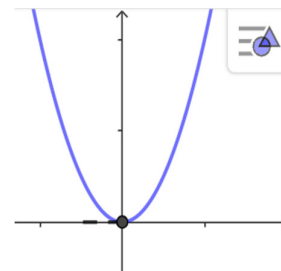


b) Funcția logaritmică cu baza subunitară este de forma $f:(0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\log_a x$, unde $a\in(0,1)$ este fixat. Din proprietățile funcțiilor elementare studiate în clasa a X-a, se cunoaște faptul că această funcție este strict descrescătoare pe $(0,+\infty)$.



Această funcție este derivabilă pe domeniul de definiție și $f'(x)=\frac{1}{x\ln a}$. Cum $x\in(0,+\infty)$ și $a\in(0,1)$, se obțin $\frac{1}{x}>0$, $\ln a<0$, deci $f'(x)<0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$. Prin urmare, f este strict descrescătoare pe $(0,+\infty)$.

c) Utilizând proprietățile funcției de gradul al doilea studiate în clasa a IX-a, inclusiv analizând graficul acesteia, se observă că funcția de gradul al doilea, $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$, este descrescătoare pe $(-\infty,0]$ și crescătoare pe $[0,+\infty)$.



Această funcție este derivabilă pe \mathbb{R} , iar $f'(x)=2x$. De aici se obține că $f'(x)\leq 0$ pentru orice $x\in(-\infty,0]$, deci f este descrescătoare pe $(-\infty,0]$ și $f'(x)\geq 0$ pentru orice $x\in[0,+\infty)$, deci f este crescătoare pe $[0,+\infty)$.

5. Determinarea intervalelor de monotonie pentru funcția $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3x$:

(1) Funcția f este derivabilă și $f'(x)=3(x^2-1)$, $x\in\mathbb{R}$.

(2) Zerourile derivatei (punctele critice) sunt soluțiile ecuației $f'(x)=0$, deci $x=-1$ sau $x=1$.

(3) Pentru determinarea semnului derivatei, se identifică intervalele pe care aceasta nu se anulează și, fiind o funcție de gradul al doilea, se poate utiliza regula de stabilire a semnului unei astfel de funcții.

Pentru identificarea corectă a intervalelor și organizarea informațiilor, se alcătuieste tabelul de variație a funcției.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+++$	0	$---$	$+++$	
$f(x)$	\nearrow	$f(-1)$	\searrow	$f(1)$	\nearrow

(4) Utilizând informațiile din tabelul de variație, se formulează concluziile privind monotonia funcției:

- pentru $x\in(-\infty,-1]$, $f'(x)\geq 0$, deci funcția f este crescătoare pe $(-\infty,-1]$;
- pentru $x\in[-1,1]$, $f'(x)\leq 0$, deci funcția f este descrescătoare pe $[-1,1]$;
- pentru $x\in[1,+\infty)$, $f'(x)\geq 0$, deci funcția f este crescătoare pe $[1,+\infty)$.

Se punctează faptul că prin metoda prezentată se obțin aceleași concluzii privind monotonia funcției cu cele desprinse prin lectură grafică, la paragraful 2. din fișă.

6. Stabiliți intervalele de monotonie pentru funcțiile următoare:

a) $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\rightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$;

b) $f:(0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln x$.

Verificați rezultatele obținute cu ajutorul reprezentării grafice a funcțiilor, realizată cu o aplicație pentru computer sau smartphone.

SECȚIUNEA a III-a Predare-învățare-evaluare. Recomandări și exemplificări la disciplina matematică, clasa a XI-a

Rezolvare: a) Funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ este derivabilă pe domeniul său de definiție și

$f'(x) = -\frac{2}{(x-1)^2}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Ecuația $f'(x) = 0$ nu are nicio soluție, deci funcția nu are puncte critice și

$f'(x) < 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Așadar, concluzia este că funcția f este strict descrescătoare pe fiecare din intervalele $(-\infty, 1)$ și $(1, +\infty)$, care alcătuiesc domeniul său de definiție.

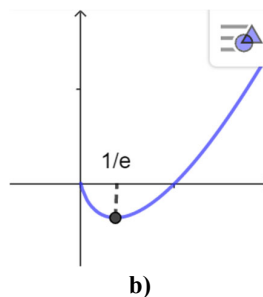
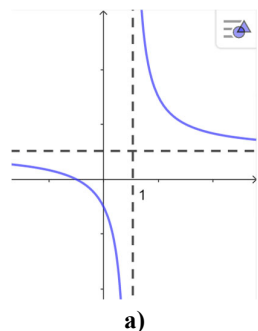
b) Funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \ln x$ este derivabilă pe intervalul $(0, +\infty)$ și $f'(x) = \ln x + 1$. Din ecuația $f'(x) = 0$ se obține punctul critic $x = e^{-1}$.

x	0	e^{-1}	$+\infty$
$f'(x)$	- - -	0	+ + +
$f(x)$	\searrow	$f(e^{-1})$	\nearrow

Concluzii:

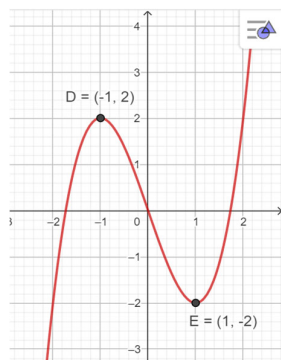
- pentru orice $x \in (0, e^{-1}]$, $f'(x) \leq 0$, deci funcția f este descrescătoare pe intervalul $(0, e^{-1}]$,
- pentru orice $x \in [e^{-1}, +\infty)$, $f'(x) \geq 0$, deci funcția f este crescătoare pe intervalul $[e^{-1}, +\infty)$.

Reprezentările grafice ale funcțiilor permit vizualizarea intervalelor de monotonicie.

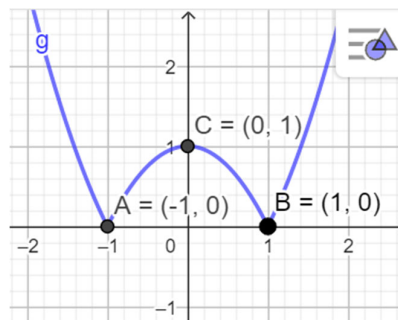


Rezolvare - Fișa suport 3

2. a) Identificați punctele de extrem local și valorile extreme locale ale funcțiilor reprezentate grafic în desenele următoare:



$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 3x$



$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = |x^2 - 1|$

Rezolvare: Analizând reprezentările grafice ale celor două funcții, se obțin:

- pentru funcția f , $x = -1$ este un punct de maxim local și $f(-1) = 2$ este valoarea maximă locală, iar $x = 1$ este un punct de minim local și $f(1) = -2$ este valoarea minimă locală;
- pentru funcția g , $x = -1$ și $x = 1$ sunt puncte de minim local și $f(-1) = 0$, $f(1) = 0$ sunt valori minime locale, iar $x = 0$ este un punct de maxim local și $f(0) = 1$ este valoarea maximă locală.

b) Stabiliți valoarea de adevăr a fiecăreia dintre următoarele propoziții:

p_1 : „Punctul $x = -1$ este punct de minim global al funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x + 5$.”

p_2 : „Punctul $x = 1$ este punct de minim global al funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + 2x - 5$.”

p_3 : „Valoarea maximă globală a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x + 5$ este egală cu 4.”

p_4 : „Valoarea maximă globală a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + 2x - 5$ este egală cu -4.”

Rezolvare: **b)** Propozițiile p_1 și p_4 sunt adevărate, iar propozițiile p_2 și p_3 sunt false.

4. Determinarea punctelor de extrem pentru funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x$:

Primele patru etape din algoritmul de determinare a punctelor de extrem sunt aceleași cu cele parcurse în *fișa suport 1*, paragraful 4.

(5) Se utilizează informațiile privind monotonia și se obțin punctele de extrem astfel:

- pentru orice $x \in (-\infty, -1]$, $f'(x) \geq 0$, deci funcția f este crescătoare pe intervalul $(-\infty, -1]$, iar pentru orice $x \in [-1, 1]$, $f'(x) \leq 0$, deci funcția f este descrescătoare pe intervalul $[-1, 1]$, de unde obținem că $x = -1$ este punct de maxim local;
- pentru orice $x \in [-1, 1]$, $f'(x) \leq 0$, deci funcția f este descrescătoare pe intervalul $[-1, 1]$, iar pentru orice $x \in [1, +\infty)$, $f'(x) \geq 0$, deci funcția f este crescătoare pe intervalul $[1, +\infty)$, deci $x = 1$ este punct de minim local.

5.

5.1 Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$.

a) Determinați punctele de extrem ale funcției f .

b) Precizați valorile extreme ale funcției f .

5.2 Arătați că funcția $f: (2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x-2}$ nu are niciun punct de extrem.

Rezolvare:

5.1 a) Funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ este derivabilă, cu $f'(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Zerourile

derivatei sunt $x = -2 \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ și $x = 0 \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Se alcătuieste tabelul de variație:

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	+++	0	---	0	+++
$f(x)$	↗	-4	↘	0	↗

Deoarece $f'(x) \geq 0$ pentru orice $x \in (-\infty, -2]$ și $f'(x) \leq 0$ pentru orice $x \in [-2, -1)$, rezultă că $x = -2$ este punct de maxim local. Cum $f'(x) \leq 0$ pentru orice $x \in (-1, 0]$ și $f'(x) \geq 0$ pentru orice $x \in [0, +\infty)$, rezultă că $x = 0$ este punct de minim local.

b) $f(-2) = -4$ este valoarea maximă locală și $f(0) = 0$ este valoarea minimă locală

5.2 Funcția $f : (2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x-2}$ este derivabilă, cu $f'(x) = -\frac{1}{(x-2)^2}$, $x \in (2, +\infty)$. Funcția nu are

puncte critice, $f'(x) < 0$ pentru orice $x \in (2, +\infty)$, deci f este strict descrescătoare pe $(2, +\infty)$ și, cum f este continuă, rezultă că nu admite niciun punct de extrem.

7. Se consideră funcția $f : [-2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 2$, al cărei tabel de variație este prezentat mai jos:

x	-2	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	- - -	0 + + +	0 + + +	
$f(x)$	14	\searrow -3	\nearrow -2	\nearrow

Stabiliți valoarea de adevăr a fiecăreia dintre următoarele propoziții:

p_1 : „Punctele de extrem ale funcției f sunt $x = -1$ și $x = 0$.”

p_2 : „Punctele de extrem ale funcției f sunt $x = -2$ și $x = -1$.”

p_3 : „Punctul $x = -1$ este punct de minim al funcției f .”

p_4 : „Punctul $x = 0$ este punct de maxim al funcției f .”

p_5 : „Punctul $x = -2$ este punct de maxim al funcției f .”

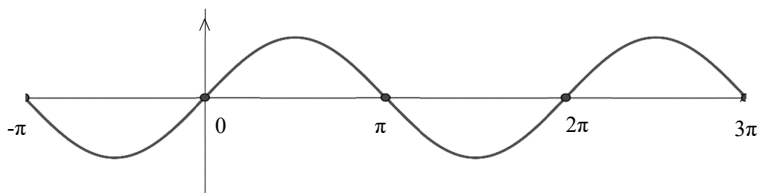
p_6 : „-3 este valoare minimă a funcției f .”

p_7 : „14 este valoare minimă a funcției f .”

Rezolvare: Propozițiile p_2, p_3, p_5 și p_6 sunt adevărate, iar propozițiile p_1, p_4 și p_7 sunt false.

Rezolvare - Fișa suport 4

2. Identificați intervalele de convexitate/concavitate ale funcției $f : [-\pi, 3\pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$, reprezentate grafic în desenul următor:



Rezolvare: Analizând reprezentarea grafică a funcției f , observăm că funcția este convexă pe intervalele $(-\pi, 0)$ și $(\pi, 2\pi)$ și concavă pe intervalele $(0, \pi)$ și $(2\pi, 3\pi)$.

4. a) Arătați că funcția exponențială este convexă pe întreg domeniul de definiție.

b) Arătați că funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ este concavă pe $(-\infty, 0)$ și convexă pe $(0, +\infty)$;

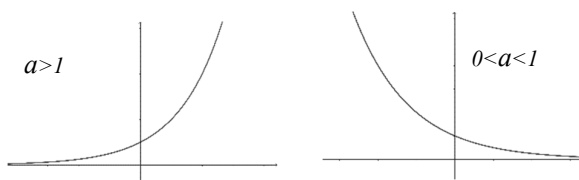
c) Arătați că funcția $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ este concavă pe intervalul $(0, +\infty)$.

d) Comparați rezultatele obținute astfel cu informațiile privind convexitatea și concavitatea rezultate din lectura grafică a reprezentărilor celor trei funcții, utilizând aplicații specifice.

SECȚIUNEA a III-a Predare-învățare-evaluare. Recomandări și exemplificări la disciplina matematică, clasa a XI-a

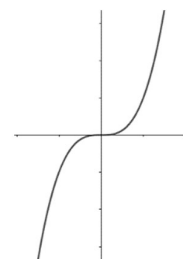
Rezolvare: a) Funcția exponențială este de forma

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$, unde $a \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$ este fixat. Din proprietățile funcțiilor elementare studiate în clasa a X-a, se cunoaște faptul că funcția exponențială este convexă pe \mathbb{R} . Această funcție este



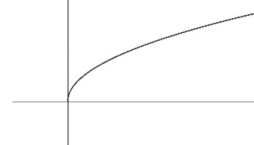
de două ori derivabilă pe \mathbb{R} și $f''(x) = a^x \ln^2 a > 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ și $a \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$, deci funcția f este convexă pe \mathbb{R} .

b) Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$, este funcția putere de gradul 3. Din proprietățile funcțiilor elementare studiate în clasa a X-a, se cunoaște faptul că această funcție este concavă pe intervalul $(-\infty, 0)$ și convexă pe intervalul $(0, +\infty)$. Această funcție este derivabilă pe \mathbb{R} și $f''(x) = 6x$. Pentru orice $x < 0$, funcția $f''(x) < 0$ și pentru orice $x > 0$, $f''(x) > 0$, deci funcția f este concavă pe $(-\infty, 0)$ și convexă pe $(0, +\infty)$.



c) Din proprietățile funcțiilor elementare studiate în clasa a X-a, se cunoaște faptul că funcția radical de ordinul doi este concavă pe intervalul $(0, +\infty)$. Această funcție este derivabilă pe intervalul $(0, +\infty)$ și $f''(x) = \frac{-1}{4x\sqrt{x}}$, $x \in (0, +\infty)$. Cum

$f''(x) < 0$ pentru orice $x \in (0, +\infty)$, funcția f este concavă pe intervalul $(0, +\infty)$.



5. Determinarea intervalelor de convexitate și concavitate pentru funcția $f: [-\pi, 3\pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$.

- (1) Funcția f este derivabilă pe intervalul $[-\pi, 3\pi]$ și $f'(x) = \cos x$, pentru orice $x \in [-\pi, 3\pi]$.
- (2) Funcția f este de două ori derivabilă pe intervalul $[-\pi, 3\pi]$ și $f''(x) = -\sin x$, pentru orice $x \in [-\pi, 3\pi]$.
- (3) Soluțiile ecuației $f''(x) = 0$ sunt $x_1 = -\pi$, $x_2 = 0$, $x_3 = \pi$, $x_4 = 2\pi$ și $x_5 = 3\pi$.
- (4) Se determină semnul funcției $f''(x)$ pe fiecare interval pe care aceasta nu se anulează, utilizând semnul funcției sinus și se alcătuieste tabelul de convexitate/concavitate al funcției f .

x	$-\pi$	0	π	2π	3π				
$f''(x)$	0	+	0	-	0	+	0	-	0
$f(x)$	0	∪	0	∩	0	∪	0	∩	0

(5) Din informațiile din tabel se formulează concluziile:

- pentru orice $x \in [-\pi, 0]$, $f''(x) \geq 0$, deci funcția f este convexă pe intervalul $[-\pi, 0]$;
- pentru orice $x \in [0, \pi]$, $f''(x) \leq 0$, deci funcția f este concavă pe intervalul $[0, \pi]$;
- pentru orice $x \in [\pi, 2\pi]$, $f''(x) \geq 0$, deci funcția f este convexă pe intervalul $[\pi, 2\pi]$;
- pentru orice $x \in [2\pi, 3\pi]$, $f''(x) \leq 0$, deci funcția f este concavă pe intervalul $[2\pi, 3\pi]$.

6. a) Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 6x + 5$. Determinați intervalele de convexitate și concavitate ale funcției f .

SECȚIUNEA a III-a Predare-învățare-evaluare. Recomandări și exemplificări la disciplina matematică, clasa a XI-a

b) Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 - 4x + 5) \cdot e^x$. Determinați intervalele de convexitate și concavitate ale funcției f .

Verificați rezultatele obținute cu ajutorul reprezentării grafice a funcțiilor, realizată cu o aplicație pentru computer sau smartphone.

Rezolvare:

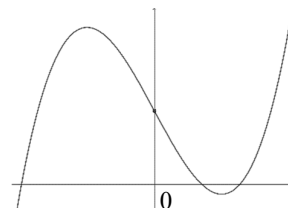
a) (1) $f'(x) = 3x^2 - 6$

(2) $f''(x) = 6x$

(3) $f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

(4)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	- - -	0	+ + +
$f(x)$	\cap	$f(0)$	\cup



(5) Concluzii:

- funcția f este concavă pe intervalul $(-\infty, 0]$
- funcția f este convexă pe intervalul $[0, +\infty)$.

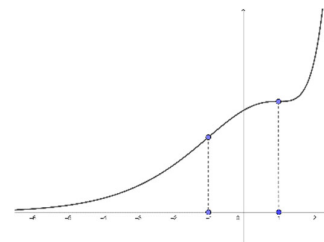
b) (1) $f'(x) = (x^2 - 2x + 1)e^x$, $x \in \mathbb{R}$

(2) $f''(x) = (x^2 - 1)e^x$, $x \in \mathbb{R}$

(3) $f''(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 1$ și $x_2 = -1$

(4)

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f''(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	\cup	$f(-1)$	\cap	$f(1)$	\cup



(5) Interpretând datele din tabel obținem:

- pentru orice $x \in (-\infty, -1]$, $f''(x) \geq 0$, deci funcția f este convexă pe intervalul $(-\infty, -1]$;
- pentru orice $x \in [-1, 1]$, $f''(x) \leq 0$, deci funcția f este concavă pe intervalul $[-1, 1]$;
- pentru orice $x \in [1, +\infty)$, $f''(x) \geq 0$, deci funcția f este convexă pe intervalul $[1, +\infty)$.

Reprezentările grafice ale funcțiilor permit vizualizarea variației funcțiilor pe intervalele de concavitate și convexitate determinate.

Rezolvare - Fișa suport 5

Exemplul 1: Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \arctg x$.

a) Arătați că $f(x) \leq g(x)$, pentru orice $x \in [0, +\infty)$.

b) Verificați inegalitatea cu ajutorul reprezentărilor grafice ale funcțiilor f și g realizate cu ajutorul unei aplicații pentru computer sau smartphone.

Rezolvare:

a) Se consideră funcția $h: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = g(x) - f(x) = \frac{x}{1+x^2} - \arctg x$.

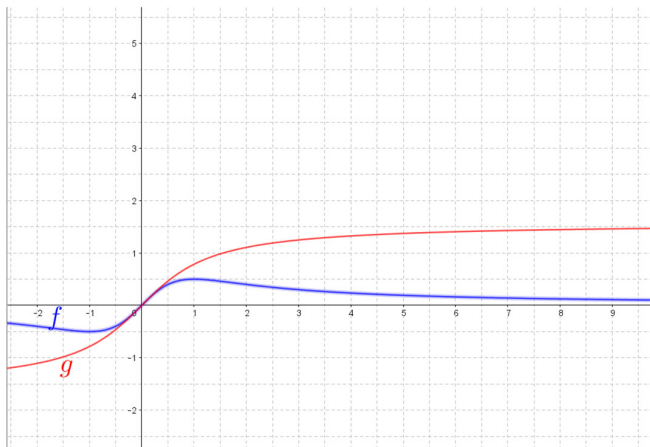
SECȚIUNEA a III-a Predare-învățare-evaluare. Recomandări și exemplificări la disciplina matematică, clasa a XI-a

$$h'(x) = g'(x) - f'(x) = \frac{2x^2}{(1+x^2)^2}, \quad x \in [0, +\infty), \text{ deci } h'(x) \geq 0, \text{ pentru orice } x \in [0, +\infty).$$

x	0	$+\infty$
$h'(x)$	+ + + + + + + + +	
$h(x)$	0	\nearrow
	min	

Cum funcția h este crescătoare pe $x \in [0, +\infty)$ și $h(0) = 0$, obținem $h(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [0, +\infty)$, deci $f(x) \leq g(x)$, pentru orice $x \in [0, +\infty)$.

b) Din reprezentările grafice ale funcțiilor f și g realizate cu aplicația GeoGebra se observă că $f(x) \leq g(x)$ pentru orice $x \in [0, +\infty)$.



Exemplul 2: Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$.

a) Utilizând tabelul de variație a funcției, determinați imaginea funcției f .

b) Determinați imaginea funcției f , lecturând reprezentarea grafică a acestei funcții

Rezolvare:

a) $f'(x) = \frac{2x^2 - 2}{(x^2 + x + 1)^2}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, iar $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ sau $x = 1$

Tabelul de variație a funcției f :

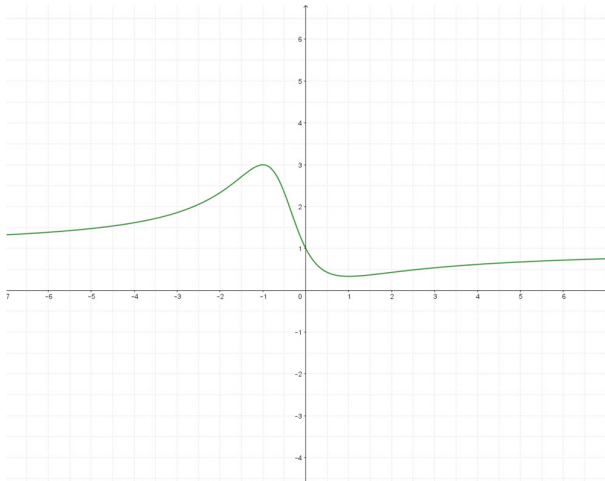
x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	+++++	0	-----	+++++
$f(x)$	1 \nearrow	3	\searrow $\frac{1}{3}$	\nearrow 1
		Max	min	

SECȚIUNEA a III-a Predare-învățare-evaluare. Recomandări și exemplificări la disciplina matematică, clasa a XI-a

Funcția f este crescătoare pe $(-\infty, -1]$, descrescătoare pe $[-1, 1]$ și crescătoare pe $[1, +\infty)$.

Cum $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$, $f(-1) = 3$, $f(1) = \frac{1}{3}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ și f este continuă pe \mathbb{R} , obținem $\text{Im}f = \left[\frac{1}{3}, 3\right]$.

b) Reprezentarea grafică a funcției f , obținută utilizând GeoGebra:



Exemplul 3: Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

a) Studiați injectivitatea și surjectivitatea acestei funcții, folosind proprietățile derivatei întâi a funcției.

b) Studiați bijectivitatea acestei funcții folosind aplicația GeoGebra.

Rezolvare:

a) $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, $x \in (0, +\infty)$ și $f'(x) = 0 \Rightarrow x = e$

Tabelul de variație a funcției f :

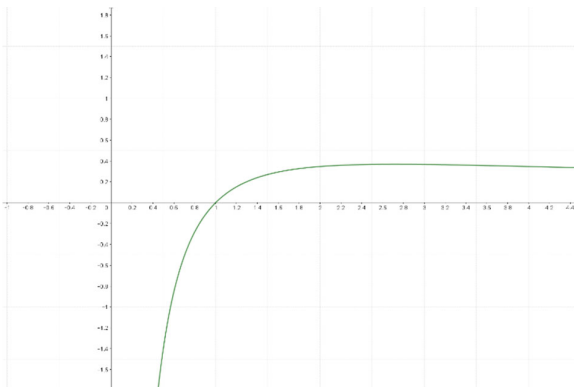
x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	+++++	0	-----
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{1}{e}$	0

Funcția f este crescătoare pe $(0, e]$ și este descrescătoare pe $[e, +\infty)$.

Cum $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$, $f(e) = \frac{1}{e}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ și f este continuă, obținem $\text{Im}f = \left(-\infty, \frac{1}{e}\right]$. Deoarece imaginea funcției nu coincide cu domeniul de valori (\mathbb{R}), rezultă că f nu este surjectivă.

Cum $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă și nemonotonă, obținem că f nu este injectivă.

b) Reprezentarea grafică a funcției f , obținută utilizând GeoGebra:



Rezolvare - Fișa suport 6

1. Recomandări pentru modelarea prin funcții a unei mărimi ale cărei valori se studiază (minim/maxim):

- se alege o variabilă convenabilă (notată de exemplu x) și se exprimă mărimile din această problemă prin x ;
- pentru mărimea a cărei valoare maximă sau minimă (punct de maxim sau de minim) trebuie determinată, se definește o funcție de variabilă x ;
- din tabelul de variație a funcției definite se găsesc punctele de maxim sau de minim și valoarea maximă sau minimă.

Observații: Nu întotdeauna este convenabil să notăm prin x una din mărimile la care problema face direct și explicit referire. Se identifică și se notează prin x acea mărime variabilă pentru care funcția obținută va fi mai simplu de studiat cu ajutorul derivatei. De asemenea, este recomandat a se discuta cu elevii, unde este cazul, și metodele algebrice de soluționare a problemelor practice.

2. Determinați valoarea maximă a diferenței dintre un număr real pozitiv și cubul său.

Rezolvare: Se consideră $d : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $d(x) = x - x^3$, unde am ales variabila x ca fiind un număr real pozitiv. Funcția d este derivabilă pe $(0, +\infty)$ și $d'(x) = 1 - 3x^2$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$.

Tabelul de variație:

x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
$d'(x)$	+++++	0	-----
$d(x)$	0	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$-\infty$
		Max	

Din tabelul de variație se observă că valoarea maximă a funcției d este $\frac{2\sqrt{3}}{9}$, deci valoarea maximă a diferenței dintre un număr real pozitiv și cubul său este $\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

SECȚIUNEA a III-a Predare-învățare-evaluare. Recomandări și exemplificări la disciplina matematică, clasa a XI-a

3. Problema 1: Determinați lungimile catetelor triunghiului dreptunghic cu ipotenuza de lungime a care are perimetrul maxim.

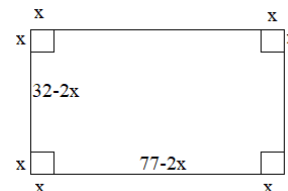
Rezolvare: Se consideră funcția $p : (0, a) \rightarrow \mathbb{R}$, $p(x) = a + x + \sqrt{a^2 - x^2}$, $a > 0$, unde am ales variabila x ca fiind lungimea unei catete a triunghiului. Funcția p este derivabilă și $p'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, $x \in (0, a)$.

Tabelul de variație a funcției p :

x	0	$\frac{a\sqrt{2}}{2}$	a
$p'(x)$	+++++	0	-----
$p(x)$		$a + a\sqrt{2}$	
		Max	

Pentru triunghiurile dreptunghice cu ipotenuza de lungime dată a , perimetrul maxim se obține pentru triunghiul care are o catetă de lungime $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, deci pentru triunghiul dreptunghic isoscel cu ipotenuza a .

Problema 2: Dintr-un carton dreptunghiular cu dimensiunile de 77 cm și 32 cm, se va confecționa o cutie fără capac, prin decuparea a patru pătrate de laturi egale, câte unul din fiecare colț al dreptunghiului. Care este lungimea laturii pătratelor decupate, astfel încât din cartonul rămas să se obțină o cutie cu volum maxim?



Rezolvare: Notăm cu x lungimea laturii unui pătrat.

Dimensiunile cutiei ce se poate forma sunt x , $77 - 2x$ și $32 - 2x$, ca în figura alăturată.

Funcția care modelează volumul cutiei este: $V : (0, 16) \rightarrow \mathbb{R}$, $V(x) = x(77 - 2x)(32 - 2x)$.

Funcția V este derivabilă și $V'(x) = 12x^2 - 436x + 2464$, $x \in (0, 16)$

Tabelul de variație a funcției V :

x	0	7	16
$V'(x)$	+++++	0	-----
$V(x)$		7938	
		Max	

Din tabelul de variație se citește că se obțină o cutie cu volum maxim pentru $x = 7$.

Observație: Se pot utiliza aplicații pentru optimizarea unor calcule necesare în rezolvarea problemei.

Pentru o vizualizare a variației funcției volum, reprezentăm grafic $f : (0, 16) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1000} V(x)$:



4. O fântână arteziană încastrată în paviment lansează spoturi de apă cu viteza $v_0 = 20\text{m/s}$. Legea de mișcare a picăturilor de apă este $h(t) = v_0 \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2}$, unde $h(t)$ reprezintă înălțimea la care se găsesc picăturile de apă după t secunde de la lansare.

a) După cât timp apa revine la nivelul solului?

b) Care este înălțimea maximă la care pot ajunge spoturile de apă? (se neglijează frecarea cu aerul, iar accelerația gravitațională se aproximează $g = 10$).

Rezolvare: a) $h(t) = h_0 + v_0 \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2} = 20t - 5t^2$

Pentru a determina după cât timp jetul de apă ajunge la sol, se rezolvă ecuația $h(t) = 0$. Soluțiile ecuației sunt $t_0 = 0$ și $t_1 = 4$, deci picăturile de apă revin la sol după 4 secunde de la lansare.

b) Pentru funcția $h : (0, 4) \rightarrow \mathbb{R}$, $h(t) = 20t - 5t^2$, se alcătuieste tabelul de variație folosind derivata de ordinul I (sau se utilizează proprietățile funcției de gradul al II-lea):

$h'(t) = 20 - 10t$, $t \in (0, 4)$

t	0	2	4
$h'(t)$	+++++	0	-----
$h(t)$	0	20	0
		Max	

Din tabelul de variație se citește faptul că înălțimea maximă la care poate ajunge jetul de apă este de 20 m .

Clasa a XI-a - M2 (științe ale naturii) 3 ore/săptămână
Unitatea de învățare: Rolul derivatelor de ordinul I și al II-lea în studiul funcțiilor
Evaluare sumativă

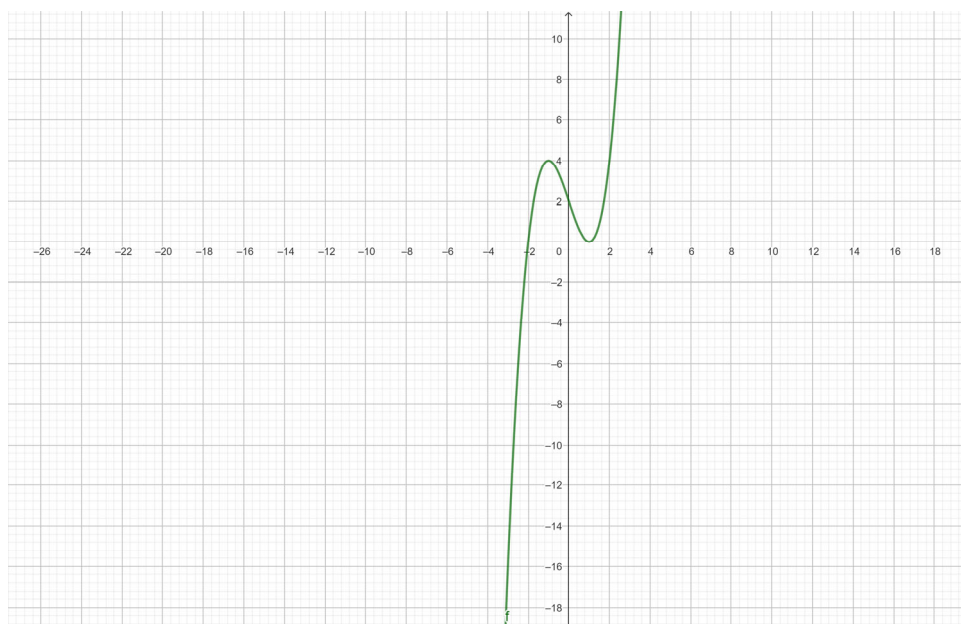
EVALUARE SUMATIVĂ

Rolul derivatelor de ordinul I și al II-lea în studiul funcțiilor
clasa a XI-a

- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 40 de minute.

30p I. Încercuți litera corespunzătoare răspunsului corect.

Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x + 2$, al cărei grafic este prezentat mai jos.



1. Numărul punctelor de extrem ale funcției f este egal cu:
A. 0 B. 1 C. 2 D. 3
2. Funcția f este descrescătoare pe intervalul:
A. $[-1, +\infty)$ B. $[-1, 1]$ C. $(-\infty, -1]$ D. $[1, +\infty)$
3. Pe intervalul $[0, +\infty)$, funcția f este:
A. convexă B. concavă C. crescătoare D. descrescătoare

II. Pe foaia de test scrieți rezolvările complete.

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1}$.

10p a) Arătați că $f'(x) = \frac{(x-1)^2 e^x}{(x^2 + 1)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

10p b) Demonstrați că funcția f este crescătoare pe \mathbb{R} .

5p c) Ordonăți crescător numerele $f(\sqrt{5})$, $f(\sqrt[3]{7})$ și $f(\pi)$.

2. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x+1)\sqrt{x}$.

10p a) Arătați că funcția f este injectivă.

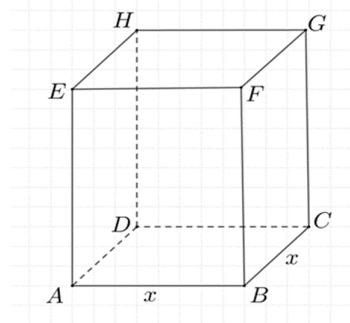
5p b) Determinați imaginea funcției f .

10p c) Determinați intervalele de convexitate și concavitate a funcției f .

10p 3.

Varianta 1. Dintre toate dreptunghiurile care au aceeași arie A , determinați lungimile laturilor dreptunghiului care are perimetrul minim.

Varianta 2. Dintre toate paralelipedele dreptunghice cu baza pătrat și aria totală egală cu A , determinați lungimea laturii bazei paralelipipedului care are volumul maxim.



EVALUARE SUMATIVĂ

Barem de corectare și de notare

I.	1. C	10p	
	2. B	10p	
	3. A	10p	
II.1.	<p>a) $f'(x) = \frac{e^x(x^2+1) - 2xe^x}{(x^2+1)^2} =$</p> $= \frac{(x^2 - 2x + 1)e^x}{(x^2+1)^2} = \frac{(x-1)^2 e^x}{(x^2+1)^2}, x \in \mathbb{R}$	6p	
	<p>b) $e^x > 0, (x-1)^2 \geq 0$ și $(x^2+1)^2 > 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$</p> <p>$f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, de unde obținem că f este crescătoare pe \mathbb{R}</p>	6p	
	<p>c) $1 < \sqrt[3]{7} < \sqrt{5} < \pi$</p> <p>$f$ strict crescătoare pe $(1, +\infty)$, deci $f(\sqrt[3]{7}) < f(\sqrt{5}) < f(\pi)$</p>	2p	
		3p	
	II.2.	<p>a) $f'(x) = \frac{3x+1}{2\sqrt{x}}, x \in (0, +\infty)$</p> <p>$f'(x) > 0$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$, deci f este strict crescătoare pe $(0, +\infty)$, de unde obținem că f este injectivă</p>	5p
		<p>b) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$</p> <p>Cum f este crescătoare pe $(0, +\infty)$ și continuă, obținem că $\text{Im } f = (0, +\infty)$</p>	2p
<p>c) $f''(x) = \frac{3x-1}{4x\sqrt{x}}, x \in (0, +\infty); f''(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$</p> <p>$f''(x) \leq 0$, pentru orice $x \in \left(0, \frac{1}{3}\right]$, deci f este concavă pe $\left(0, \frac{1}{3}\right]$; $f''(x) \geq 0$, pentru orice $x \in \left[\frac{1}{3}, +\infty\right)$, deci f este convexă pe $\left[\frac{1}{3}, +\infty\right)$</p>		6p	
		4p	

II.3 Varianta 1

II.3	<p>$A = xy$, unde $x, y \in (0, +\infty)$ sunt dimensiunile dreptunghiului, de unde obținem $y = \frac{A}{x}$, deci perimetrul dreptunghiului este egal cu $2\left(x + \frac{A}{x}\right)$ și se consideră funcția $P: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$,</p> $P(x) = 2\left(x + \frac{A}{x}\right)$	4p
	<p>$P'(x) = 2\left(1 - \frac{A}{x^2}\right)$, $x \in (0, +\infty)$, cu $P'(\sqrt{A}) = 0$, $P'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in (0, \sqrt{A}]$ și $P'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [\sqrt{A}, +\infty)$, deci P este descrescătoare pe $(0, \sqrt{A}]$ și crescătoare pe</p>	6p

SECȚIUNEA a III-a Predare-învățare-evaluare. Recomandări și exemplificări la disciplina matematică, clasa a XI-a

	$[\sqrt{A}, +\infty)$, de unde obținem $P(x) \geq P(\sqrt{A})$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$, deci dreptunghiul cu perimetrul minim este pătratul cu latura egală cu \sqrt{A}
--	---

II.3 Varianta 2

II.3	<p>$A = 2x^2 + 4xy$, unde $x, y \in (0, +\infty)$ sunt dimensiunile paralelipipedului, de unde obținem $y = \frac{A - 2x^2}{4x}$, deci volumul paralelipipedului este egal cu $\frac{Ax}{4} - \frac{x^3}{2}$ și se consideră funcția $V: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, V(x) = \frac{Ax}{4} - \frac{x^3}{2}$</p> <p>$V'(x) = \frac{A}{4} - \frac{3x^2}{2}, x \in (0, +\infty); V'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{6A}}{6}; V'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in \left(0, \frac{\sqrt{6A}}{6}\right]$</p> <p>și $V'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in \left[\frac{\sqrt{6A}}{6}, +\infty\right)$, deci V este crescătoare pe $\left(0, \frac{\sqrt{6A}}{6}\right]$ și descrescătoare pe $\left[\frac{\sqrt{6A}}{6}, +\infty\right)$, de unde obținem $V(x) \leq V\left(\frac{\sqrt{6A}}{6}\right)$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$, deci latura bazei paralelipipedului cu volum maxim, în condițiile problemei, este egală cu $\frac{\sqrt{6A}}{6}$ (cubul de latură $\frac{\sqrt{6A}}{6}$)</p>	4p
		6p

EVALUARE SUMATIVĂ
Matrice de specificații

Conținuturi \ Competențe de evaluat	Competențe de evaluat						Total
	XI.CS. 1.2	XI.CS. 2.2	XI.CS. 3.2	XI.CS. 4.2	XI.CS. 5.2	XI.CS. 6.2	
Calculul derivatelor			II.1a) (10p)				10p
Determinarea intervalelor de monotonie ale unei funcții			II.1b) (10p)		I.2 (10p)		20p
Determinarea punctelor de extrem ale unei funcții	I.1 (10p)						10p
Determinarea intervalelor de convexitate și concavitate ale unei funcții		I.3 (10p)	II.2c) (10p)				20p
Aplicații – studiul variației funcțiilor cu ajutorul derivatelor				II.1c) (5p) II.2a) (10p) II.2b) (5p)		II.3 (10p)	30p
Total	10p	10p	30p	20p	10p	10p	90p

Competențe de evaluat asociate testului de evaluare sumativă:

XI.CS 1.2. Caracterizarea unor funcții utilizând reprezentarea geometrică a unor cazuri particulare

XI.CS 2.2. Interpretarea unor proprietăți ale unor funcții cu ajutorul reprezentărilor grafice

XI.CS 3.2. Aplicarea unor algoritmi specifici calculului diferențial în rezolvarea unor probleme

XI.CS 4.2. Exprimarea cu ajutorul noțiunilor de limită, continuitate, derivabilitate, monotonie, a unor proprietăți cantitative și calitative ale unei funcții

XI.CS 5.2. Utilizarea reprezentării grafice a unei funcții pentru verificarea unor rezultate și pentru identificarea unor proprietăți

XI.CS 6.2. Determinarea unor optimuri situaționale prin aplicarea calculului diferențial în probleme practice

III.2 Exemplificarea de strategii de învățare interactivă și de evaluare bazată pe noile tehnologii

III.2.1.1 Strategii de învățare interactivă bazate pe noile tehnologii pentru *Elemente de analiză matematică* și pentru *Elemente de calcul matriceal și sisteme de ecuații liniare*

Tehnologiile moderne pot transforma modul în care predăm și învățăm matematica, contribuind la creșterea eficienței și atractivității procesului de predare-învățare-evaluare.

Platforme de învățare online precum *Khan Academy*, *Coursera*, *edX* sau *Udemy* oferă lecții interactive de analiză matematică și de elemente de calcul matriceal și sisteme de ecuații liniare. Aceste cursuri includ filme, exerciții practice, teste și feedback imediat. Sarcinile sunt personalizate în funcție de nivelul fiecărui cursant, astfel încât fiecare poate avansa în propriul ritm.

Există o varietate de *aplicații mobile* care pot fi utilizate pentru integrarea conceptelor matematice în jocuri captivante și interactive. De exemplu, aplicația *Photomath* - pentru rezolvarea problemelor matematice prin scanarea lor sau aplicația *GeoGebra* - pentru explorarea graficelor și a geometriei, pot constitui suport pentru activități de învățare în cadrul cărora elevul își formează/dezvoltă atât competențe specifice matematicii, cât și competențe digitale și competențe personale, sociale și de a învăța să înveți. Utilizarea jocurilor matematice poate îmbunătăți angajamentul și atitudinea elevilor față de matematică.

Pentru a vizualiza concepte abstracte, în lecțiile de matematică se pot utiliza *simulatoare interactive* precum *Desmos* - pentru grafice de funcții sau *Wolfram Alpha* - pentru calcul simbolic și vizualizări tridimensionale. Aceste instrumente pot ajuta elevii să-și dezvolte intuiția matematică și să înțeleagă mai bine conceptele complexe.

Prin folosirea de platforme de colaborare online precum *Google Docs* sau *Microsoft OneNote* pentru a crea documente și notițe colaborative, elevii pot lucra împreună la rezolvarea unor probleme și exerciții, împărțind gândurile și soluțiile în timp real.

Filmulețe explicative și tutoriale online:

- Creați videoclipuri scurte în care să explicați concepte cheie din analiza matematică și din calculul matriceal și sisteme de ecuații liniare. Folosește instrumente precum YouTube sau Vimeo pentru a distribui conținutul. Elevii pot viziona aceste filmulețe ori de câte ori este nevoie pentru a înțelege anumite concepte mai dificile.

Sesiuni de discuții și întrebări online:

- Încurajați elevii să folosească platforme de discuții online sau rețele sociale pentru a lansa întrebări și dezbateri legate de conceptele matematice. Elevii pot interacționa între ei și cu dumneavoastră, consolidându-și înțelegerea și abilitățile de comunicare matematică.

Proiecte și aplicații practice:

- Încurajați elevii să aplice conceptele în proiecte practice, cum ar fi analizarea datelor, modelarea matematică și/sau rezolvarea problemelor concrete din viața reală. Aceste proiecte îi vor ajuta pe elevi să vadă relevanța matematicii în contextul cotidian și să își dezvolte abilități practice.

În final, alegerea strategiilor depinde de nevoile specifice ale elevilor și de resursele disponibile. Combinația de metode interactive va crea un mediu de învățare dinamic și captivant, care va sprijini dezvoltarea înțelegerii atât a conceptelor calitative, cât și a celor cantitative ale analizei matematice și ale calculului matriceal și sisteme de ecuații liniare.

III.2.1.2 Strategii de evaluare bazate pe noile tehnologii în *Elementele de analiză matematică* și în *Elementele de calcul matriceal și sisteme de ecuații liniare*

Strategiile de evaluare bazate pe tehnologiile moderne îmbină avantajele oferite de suportul digital cu scopurile învățării în domeniul matematicii.

Elemente de analiză matematică:

- Simulări interactive: Utilizați software matematic pentru a crea simulări interactive care permit elevilor să exploreze concepte dificile din analiza matematică, cum ar fi limitele, derivatele și integralele. Aceste simulări pot ajuta elevii să își consolideze înțelegerea prin experimentare directă și pot fi adaptate/utilizate pentru evaluare.
- Platforme de evaluare online: Folosiți platforme de evaluare online pentru a crea teste și exerciții de analiză matematică, care oferă feedback instant și personalizat. Acest lucru permite elevilor să-și evalueze rapid cunoștințele și să identifice zonele în care au nevoie de mai multă practică.
- Filmulețe explicative și tutoriale: Înregistrați clipuri explicative care să detalieze pașii de rezolvare a problemelor de analiză matematică. Aceste videoclipuri pot fi revăzute de elevi ori de câte ori au nevoie și pot servi ca resurse suplimentare pentru învățare, putând fi indicate spre (re)vizualizare ca feedback la răspunsuri incorecte la unul sau mai mulți itemi dintr-o probă de evaluare.

Elemente de calcul matriceal și sisteme de ecuații liniare:

- Jocuri matematice: Dezvoltați jocuri educative care să implice operații cu vectori, matrice. Aceste jocuri pot stimula interesul elevilor și le pot oferi oportunități de a aplica conceptele legate de matrice și de sisteme de ecuații liniare într-un mod distractiv și pot fi utilizate și pentru evaluare.
- Platforme de colaborare online: Utilizați platforme de colaborare online pentru a iniția proiecte de grup care implică rezolvarea problemelor de calcul matriceal și sisteme de ecuații liniare. Elevii pot lucra împreună în timp real pentru a rezolva sarcini complexe și pentru a dezvolta abilități de comunicare matematică.
- Vizualizare interactivă: Folosiți instrumente de vizualizare interactivă pentru a ilustra conceptele abstracte (dar și pentru a verifica înțelegerea lor) din calcul matriceal și sisteme de ecuații liniare. Elevii pot manipula vizualizările pentru a-și consolida înțelegerea și pentru a explora interpretări și proprietăți geometrice ale noțiunilor de algebră.

În fiecare din aceste strategii, tehnologia poate fi un instrument puternic pentru a spori înțelegerea și angajamentul elevilor în studiul noțiunilor de analiză matematică și cele legate de matrice, determinanți și sisteme de ecuații liniare. Asigurați-vă că alegeți tehnologiile și resursele potrivite în funcție de nevoile și nivelul de cunoștințe al elevilor dumneavoastră.

De asemenea, trebuie menționat că orice recomandare de resurse educaționale online care pot sprijini învățarea interactivă și evaluarea rezultatelor învățării implică anumite limite de utilizare. Astfel, reiterăm faptul că înainte de utilizarea la clasă, profesorul trebuie să verifice:

- corespondența link-ului cu sursa;
- condițiile de acces și de utilizare;
- conținutul resursei educaționale din perspectiva:
 - utilității sale pentru facilitarea/producerea învățării;
 - corespondența cu programa școlară, inclusiv din punctul de vedere al formalismului matematic utilizat (în cazul în care resursa este utilă, dar trebuie actualizată din perspectiva programelor în vigoare, profesorul va asigura toate elementele necesare utilizării în conformitate a resursei).

SECȚIUNEA a III-a Predare-învățare-evaluare. Recomandări și exemplificări la disciplina matematică, clasa a XI-a

O selecție de adrese web ale unor aplicații și resurse educaționale disponibile online:

1. Aplicații gratuite pentru realizarea de lecții, grafice, calcule etc.:
 - <https://www.desmos.com/>
 - <https://www.dudamath.com/>
 - <https://www.geogebra.org/>
2. Pagini web cu acces gratuit; colecții de cursuri, prelegeri, videoclipuri, aplicații:
 - <https://www.khanacademy.org/math/>
 - <https://www.mathwarehouse.com/>
 - <https://mathigon.org/>
 - <https://www.mathsisfun.com>
3. Lecții difuzate de TVR2 în cadrul emisiunii TeleȘcoala:
 - https://www.youtube.com/results?search_query=telescoala+tvr+2
4. Exemple de activități remediale și de progres pentru clasa a XI-a
 - tangenta la o curbă, derivata unei funcții într-un punct <https://www.geogebra.org/m/cmdjgBc5>
 - funcții derivabile <https://www.khanacademy.org/math/ap-calculus-ab/ab-differentiation-1-new/ab-2-4/e/differentiability-at-a-point-algebraic>
 - operații cu funcții derivabile <https://www.geogebra.org/m/BXBRxTQq>

III.2.2 Exemplificări de evaluări inițiale pentru clasa a XI-a

În vederea bugetării optime a numărului de ore, alocat în clasa a XI-a, fiecărei unități de învățare din programa școlară a disciplinei *matematica*, este necesară administrarea unui test inițial, care va indica nivelul de formare și/sau de dezvoltare a competențelor specifice ale elevilor, din domeniile ancoră (necesare și/sau utile în clasa a XI-a). De asemenea, în urma interpretării testului inițial, se poate stabili un program remedial/de progres care să vizeze noțiunile care sunt prezente în conținuturile clasei a XI-a. De exemplu, este indicată reactualizarea noțiunii de funcție, rezolvarea de probleme cu funcții și proprietăți ale acestora, rezolvarea de diferite tipuri de ecuații - având în vedere importanța acestora în materia clasei a XI-a.

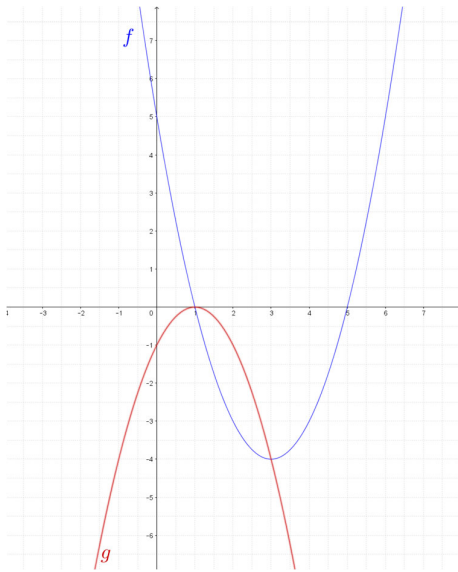
III.2.2.1 Exemflu de evaluare inițială, clasa a XI-a – profilul real, specializarea matematică-informatică și filiera vocațională, profilul militar MApN

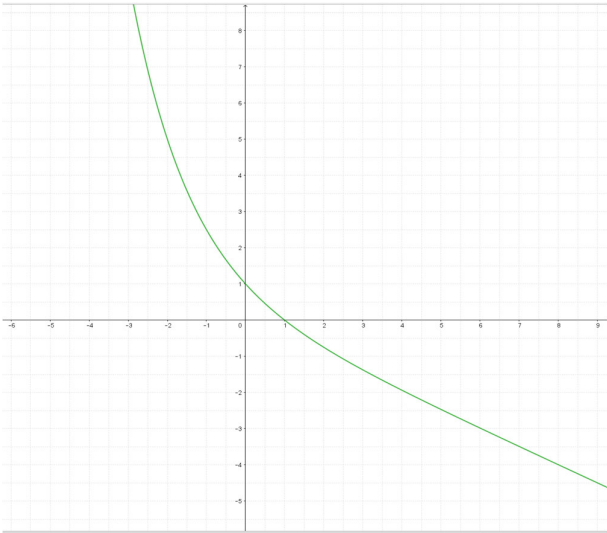
Clasa a XI-a – M1 (matematică-informatică) 4 ore/săptămână
Matematică

EVALUARE INIȚIALĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 45 de minute.
- Se acordă zece puncte din oficiu.
- Pentru fiecare item, dintre cele patru variante de răspuns doar o variantă este corectă.

Pe foaia de lucru, pentru fiecare item, scrieți litera corespunzătoare răspunsului corect.

	<p>Pentru cerințele 1 - 3, se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 6x + 5$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = -x^2 + 2x - 1$, ale căror grafice sunt reprezentate în figura de mai jos.</p> 
<p>5p</p>	<p>1. Mulțimea soluțiilor inecuației $f(x) \leq g(x)$ este:</p> <p>A. $(-\infty, -1] \cup [6, +\infty)$ B. $[-4, 0]$ C. $[1, 3]$ D. $[0, +\infty)$</p>
<p>5p</p>	<p>2. Imaginea prin funcția f a intervalului $[1, 5]$ este mulțimea:</p> <p>A. $\{0\}$ B. $[-4, 0]$ C. $[1, 3]$ D. $[0, +\infty)$</p>
<p>5p</p>	<p>3. Se consideră funcția $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) + m$, unde m este număr real. Mulțimea numerelor reale m pentru care ecuația $h(x) = g(x)$ nu are soluții este:</p> <p>A. $(4, +\infty)$ B. $(-\infty, 0)$ C. $(-3, -1)$ D. $(-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$</p>

<p>5p</p>	<p>4. Se consideră funcția $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $u(x) = \begin{cases} g(x), & x \in (-\infty, 1) \\ f(x), & x \in [1, +\infty) \end{cases}$. Propoziția adevărată este:</p> <p>A. Funcția u este injectivă și este surjectivă. B. Funcția u este injectivă și nu este surjectivă. C. Funcția u nu este injectivă și este surjectivă. D. Funcția u nu este nici injectivă, nici surjectivă.</p>
<p>5p</p>	<p>5. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - \frac{x}{2}$, al cărei grafic este reprezentat în figura de mai jos.</p>  <p>Propoziția adevărată este:</p> <p>A. Funcția f este crescătoare și convexă. B. Funcția f este crescătoare și concavă. C. Funcția f este descrescătoare și convexă. D. Funcția f este descrescătoare și concavă.</p>
<p>5p</p>	<p>6. Propoziția „Orice funcție $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, care este crescătoare pe $(-\infty, 0)$ și pe $(0, +\infty)$, este crescătoare pe \mathbb{R}” este:</p> <p>A. Adevărată B. Falsă</p>
<p>10p</p>	<p>7. Se consideră numerele reale $a = \sqrt{5}$ și $b = \sqrt[3]{11}$. Atunci:</p> <p>A. $a < b < 3$ B. $b < 3 < a$ C. $a < 3 < b$ D. $b < a < 3$</p>
<p>10p</p>	<p>8. Numărul soluțiilor ecuației $4^x - 2^x = 12$ este egal cu:</p> <p>A. 0 B. 1 C. 2 D. 3</p>

SECȚIUNEA a III-a Predare-învățare-evaluare. Recomandări și exemplificări la disciplina matematică, clasa a XI-a

10p	9. Dacă $\log_3 2 = a$, atunci $\log_{16} 24$ este egal cu: A. $\frac{3a-1}{4}$ B. $\frac{3a+1}{4a}$ C. $\frac{3a-1}{4a}$ D. $\frac{3a+1}{4}$
10p	10. Numărul $S = C_{10}^1 + 2C_{10}^2 + 3C_{10}^3 + \dots + 9C_{10}^9 + 10C_{10}^{10}$, este egal cu: A. 1024 B. 2560 C. 5120 D. 10240
10p	11. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (m^2 - 4)x^2 + (2 - m)x + 2023$, unde m este număr real. Mulțimea numerelor reale m pentru care funcția f este injectivă este: A. $\mathbb{R} \setminus \{2, -2\}$ B. $\{2, -2\}$ C. $\{2\}$ D. $\{-2\}$
10p	12. În sistemul cartezian xOy se consideră dreptele d_1 de ecuație $2x - y - 3 = 0$ și d_2 de ecuație $mx + 4y - 1 = 0$, unde m este număr real. Numărul real m pentru care dreptele d_1 și d_2 sunt perpendiculare este: A. 2 B. 8 C. -2 D. -8

Barem de corectare

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
C	B	A	C	C	B	D	B	B	C	D	A
5p	5p	5p	5p	5p	5p	10p	10p	10p	10p	10p	10p

Matrice de specificații

Evaluare inițială, clasa a XI-a – 4 ore/săptămână

Competențe Conținuturi	IX. CS 1.3	X. CS 2.1	X. CS 3.1	IX. CS 4.3	IX. CS 5.3	X. CS 6.3	Total
		X. CS 2.2	X. CS 3.2	X. CS 4.5	X. CS 5.2		
IX Funcții; lecturi grafice	1(5p)			2(5p)	5(5p)		15p
X Mulțimi de numere. Numere reale		7(10p)	9(10p)				20p
X Funcții și ecuații		3(5p) 4(5p)	8(10p)		6(5p) 11(10p)		35p
X Metode de numărare						10(10p)	10p
X Geometrie				12(10p)			10p
Total	5p	20p	20p	15p	20p	10p	90p

Competențe de evaluat asociate testului de evaluare inițială:

IX.CS 1.3 Identificarea valorilor unei funcții folosind reprezentarea grafică a acesteia

IX.CS 4.3 Caracterizarea unor proprietăți ale funcțiilor numerice prin utilizarea graficelor acestora și a ecuațiilor asociate

IX.CS 5.3 Deducerea unor proprietăți ale funcțiilor numerice prin lectură grafică

X.CS 2.1 Determinarea echivalenței între forme diferite de scriere a unui număr, compararea și ordonarea numerelor reale

X.CS 2.2 Prelucrarea informațiilor ilustrate prin graficul unei funcții în scopul deducerii unor proprietăți ale acesteia (monotonie, semn, bijectivitate, inversabilitate, continuitate, convexitate).

X.CS 3.1 Aplicarea unor algoritmi specifici calculului cu numere reale pentru optimizarea unor calcule

X.CS 3.2 Utilizarea proprietăților funcțiilor în trasarea graficelor și rezolvarea de ecuații

X.CS 4.5 Expimarea analitică, sintetică sau vectorială a caracteristicilor matematice ale unei configurații geometrice

X.CS 5.2 Interpretarea pe baza lecturii grafice, a proprietăților algebrice ale funcțiilor

X.CS 6.3 Alegerea strategiilor de rezolvare a unor situații practice în scopul optimizării rezultatelor

Evaluarea inițială pentru clasa a XI-a (4 ore) poate fi accesată online la adresa

<https://forms.gle/6PH2YRCQcFCvEFzNA>

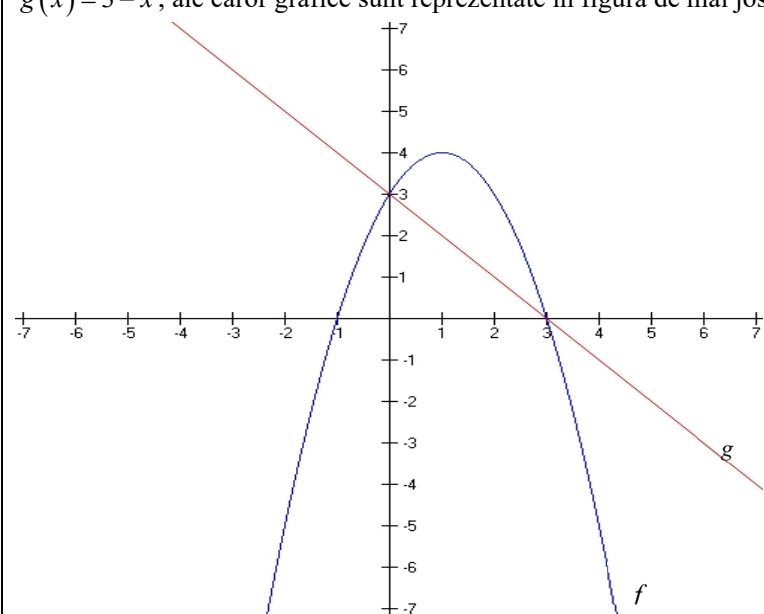
III.2.2.2 Exemplu de evaluare inițială clasa a XI-a – profilul real, specializarea științe ale naturii

**Clasa a XI-a - M2 (științe ale naturii) 3 ore/săptămână
Matematică**

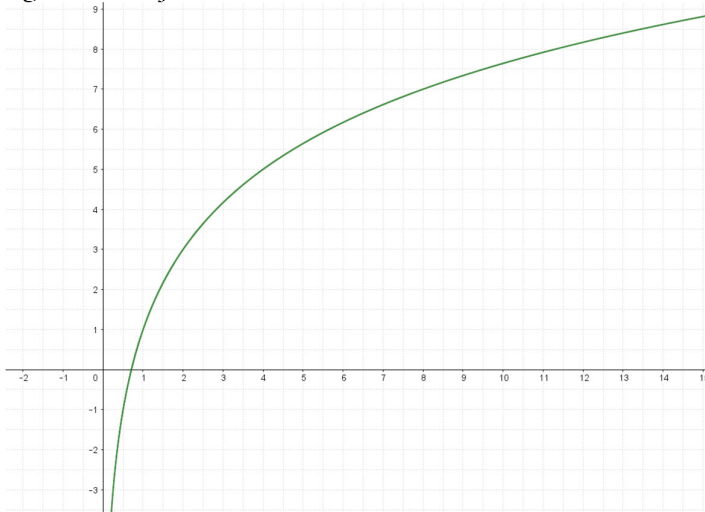
EVALUARE INIȚIALĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 40 de minute.
- Se acordă zece puncte din oficiu.
- Pentru fiecare item, dintre cele patru variante de răspuns doar o variantă este corectă

Încercuți litera corespunzătoare răspunsului corect.

	<p>Pentru cerințele 1 - 3, se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 3 - x$, ale căror grafice sunt reprezentate în figura de mai jos.</p> 
<p>5p</p>	<p>1. Numărul soluțiilor reale ale ecuației $f(x) = g(x)$ este:</p> <p>A. 0 B. 1 C. 2 D. 3</p>
<p>5p</p>	<p>2. Imaginea prin funcția g a intervalului $(-\infty, 1)$ este intervalul:</p> <p>A. $[1, +\infty)$ B. $(-\infty, 1]$ C. $(2, +\infty)$ D. $(-\infty, 0)$</p>
<p>5p</p>	<p>3. Afirmația corectă este:</p> <p>A. Funcția f este injectivă și este surjectivă.</p> <p>B. Funcția f este injectivă și nu este surjectivă.</p> <p>C. Funcția f nu este injectivă și este surjectivă.</p> <p>D. Funcția f nu este nici injectivă, nici surjectivă.</p>

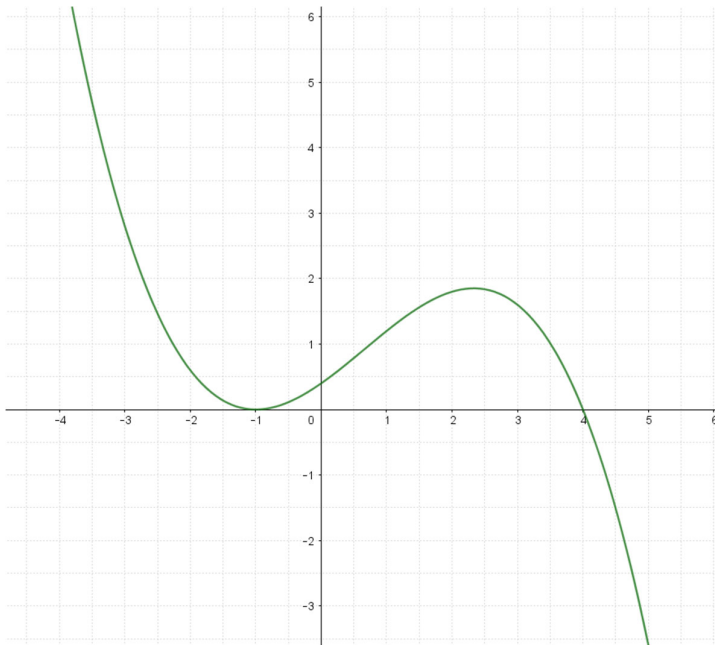
5p 4. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + 2 \log_2 x$, al cărei grafic este reprezentat în figura de mai jos.



Afirmația corectă este:

- A. Funcția f este crescătoare și convexă.
- B. Funcția f este crescătoare și concavă.
- C. Funcția f este descrescătoare și convexă.
- D. Funcția f este descrescătoare și concavă.

5p 5. Se consideră o funcție $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, al cărei grafic este reprezentat în figura de mai jos.



Conform informațiilor din figură, mulțimea soluțiilor inecuației $f(x) < 0$ este:

- A. $(-\infty, -1)$
- B. $(-1, 4)$
- C. $(0, 4)$
- D. $(4, +\infty)$

SECȚIUNEA a III-a Predare-învățare-evaluare. Recomandări și exemplificări la disciplina matematică, clasa a XI-a

5p	6. Propoziția „Orice funcție $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, care este crescătoare pe $(-\infty, 0]$ și pe $(0, +\infty)$, este crescătoare pe \mathbb{R} ” este: A. Adevărată B. Falsă
10p	7. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 5x + 6$. Mulțimea soluțiilor inecuației $f(x) \leq 0$ este: A. $[-3, -2]$ B. $[-2, 3]$ C. $(-\infty, -3]$ D. $[2, +\infty)$
10p	8. Ordinea crescătoare a numerelor $a = \sqrt[3]{343}$, $b = 3!$ și $c = \log_2 32$ este: A. b, a, c B. b, c, a C. c, a, b D. c, b, a
10p	9. Știind că $2 \log_2 3 + \log_4 25 = \log_2 x$, numărul x este egal cu: A. 30 B. 45 C. 75 D. 225
10p	10. Suma soluțiilor reale ale ecuației $3^{2x-1} - 4 \cdot 3^{x-1} + 1 = 0$ este egală cu: A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
10p	11. Numărul real m pentru care dreptele $d_1: mx - y - 3 = 0$ și $d_2: 3x - 2y - 3 = 0$ sunt paralele este egal cu: A. $\frac{3}{2}$ B. $-\frac{3}{2}$ C. 6 D. -6
10p	12. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x + 2$ și dreapta d de ecuație $y = mx + n$, unde m și n sunt numere reale. Dreapta d este tangentă la graficul funcției f în punctul de abscisă 2 situat pe graficul lui f . Numerele reale m și n sunt: A. $m = 1, n = 1$ B. $m = 3, n = -2$ C. $m = 0, n = -\frac{7}{4}$ D. $m = \frac{1}{2}, n = \frac{7}{4}$

Barem de notare

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
C	C	D	B	D	B	A	D	B	A	A	B
5p	5p	5p	5p	5p	5p	10p	10p	10p	10p	10p	10p

Matricea de specificații

Competențe de evaluat	IX.	X.	IX.	IX.	IX.	IX.	Total
	CS 1.3	CS 2.1	CS 3.6	CS 4.3	CS 5.3	CS 6.6	
Conținuturi		X. CS 2.2	X. CS 3.2	X. CS 4.5	X. CS 5.2		
IX Funcții; lecturi grafice	1(5p)			2(5p)	5(5p)		15p
IX Interpretarea geometrică a proprietăților algebrice ale funcției de gradul al II-lea			7(10p)			12(10p)	20p
X Mulțimi de numere. Numere reale		8(10p)					10p

SECȚIUNEA a III-a Predare-învățare-evaluare. Recomandări și exemplificări la disciplina matematică, clasa a XI-a

X Funcții și ecuații		3(5p) 4(5p)	9(10p) 10(10p)		6(5p)		35p
X Geometrie				11(10p)			10p
Total	5p	20p	30p	15p	10p	10p	90p

Competențe de evaluat asociate testului de evaluare inițială:

IX.CS 1.3 Identificarea valorilor unei funcții folosind reprezentarea grafică a acesteia

IX.CS 3.6 Utilizarea unor algoritmi pentru rezolvarea ecuațiilor, inecuațiilor și a sistemelor de ecuații și pentru reprezentarea grafică a soluțiilor acestora

IX.CS 4.3 Caracterizarea unor proprietăți ale funcțiilor numerice prin utilizarea graficelor acestora și a ecuațiilor asociate

IX.CS 5.3 Deducerea unor proprietăți ale funcțiilor numerice prin lectură grafică

X.CS 2.1 Determinarea echivalenței între forme diferite de scriere a unui număr, compararea și ordonarea numerelor reale

X.CS 2.2 Prelucrarea informațiilor ilustrate prin graficul unei funcții în scopul deducerii unor proprietăți ale acesteia (monotonie, semn, bijectivitate, inversabilitate, continuitate, convexitate).

X.CS 3.2 Utilizarea de proprietăți ale funcțiilor în trasarea graficelor și rezolvarea de ecuații.

X.CS 4.5 Exprimarea analitică, sintetică sau vectorială a caracteristicilor matematice ale unei configurații geometrice.

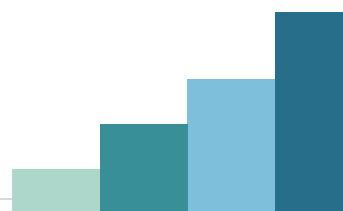
X.CS 5.2 Interpretarea, pe baza lecturii grafice, a proprietăților algebrice ale funcțiilor

IX.CS 6.6 Interpretarea informațiilor conținute în reprezentări grafice prin utilizarea de estimări, aproximări și strategii de optimizare

Evaluarea inițială pentru clasa a XI-a, specializarea științe ale naturii (3 ore), poate fi accesată și online la adresa <https://forms.gle/B6f6ZFkQU7b7WhHW6> .

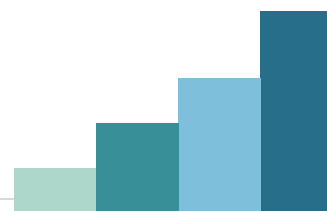
Colectivul de autori

Streinu-Cercel Gabriela	Ministerul Educației	Coordonator
Stoleriu Anca	Centrul Național de Politici și Evaluare în Educație	Coordonator
Chiș Mihai	Universitatea de Vest, Timișoara	Autor
Lașcu Dan	Academia Navală „Mircea cel Bătrân”, Constanța	Autor
Andronache Mariean	Colegiul Național „Sf. Sava”, București	Autor
Cerbu-Sfarghiu Vladimir	Colegiul Național Militar „Ștefan cel Mare”, Câmpulung Moldovenesc	Autor
Cristea Cătălin	Colegiul Național Pedagogic „Ștefan Velovan”, Craiova	Autor
Ezaru Lorena Mihaela	Colegiul Național Militar „Dimitrie Cantemir”, Breaza	Autor
Friedrich Gabriela	Colegiul Economic „Nicolae Titulescu”, Baia Mare	Autor
Goga Roxana	Colegiul Național „Sf. Sava”, București	Autor
Iancu Emilia	Colegiul Național „Matei Basarab”, București	Autor
Magdaș Adrian	Colegiul Național „Emil Racoviță”, Cluj Napoca	Autor
Muntean Doina Valerica	Colegiul Național „Ioan Slavici”, Satu Mare	Autor
Perianu Marius	Colegiul Național „Ion Minulescu”, Slatina	Autor
Șontea Ovidiu	Colegiul Național „Tudor Vianu”, București	Autor



Resurse bibliografice

1. RECOMANDAREA CONSILIULUI din 22 mai 2018 privind competențele-cheie pentru învățarea pe tot parcursul vieții, [https://eur-lex.europa.eu/legal-content/RO/TXT/PDF/?uri=CELEX:32018H0604\(01\)](https://eur-lex.europa.eu/legal-content/RO/TXT/PDF/?uri=CELEX:32018H0604(01))
2. Repere metodologice pentru aplicarea curriculumului la clasa a IX-a, în anul școlar 2021-2022, <https://rocnee.eu/index.php/dcee-oriz/curriculum-oriz/repere-metodologice>
3. Repere metodologice pentru aplicarea curriculumului la clasa a X-a, în anul școlar 2022-2023, <https://rocnee.eu/index.php/dcee-oriz/curriculum-oriz/repere-metodologice>



REPERE METODOLOGICE MATEMATICĂ 2023-2024



ÎNVĂȚĂMÂNT LICEAL
FILIERA TEHNOLOGICĂ,
ÎNVĂȚĂMÂNT PROFESIONAL
CLASA a XI-a



**SPECIFICUL DISCIPLINEI MATEMATICĂ ÎN ANSAMBLUL CURRICULUMULUI NAȚIONAL, ÎN CONTEXTUL ÎNVĂȚĂMÂNTULUI LICEAL TEHNOLOGIC ȘI ÎNVĂȚĂMÂNTULUI PROFESIONAL, CLASA a XI-a**

Pentru anul școlar 2023-2024, la disciplina matematică, procesul de predare-învățare-evaluare pentru clasa a XI-a se raportează, în principal, la:

- **programele școlare în vigoare:**
 - **Anexa nr. 2** la *ordinul ministrului educației și cercetării nr. 4598/31.08.2004* – programa școlară Matematică, clasa a X-a, ciclul inferior al liceului (aplicabilă pentru clasa a XI-a, învățământ profesional, inclusiv dual) – 1 oră/săptămână
 - **Anexa nr. 2** la *ordinul ministrului educației și cercetării nr. 3252/13.02.200*, pentru **filiera tehnologică, toate calificările profesionale: 3 ore / săpt. (TC)**
- **planurile-cadru în vigoare**, aprobate prin **O.M.E.C.I. nr. 3410, 3411, 3412/2009, O.M.E.C.TS. 53247/2011**, cu modificările și completările ulterioare
- **structura anului școlar 2023-2024**, aprobată prin **O.M.E. nr. 3800/09.03.2023**

Având în vedere că pentru clasa a XI-a, la disciplina matematică, se aplică programele școlare utilizate și în anii școlari anteriori, precum și având în vedere că actuala structură a anului școlar continuă pe cea deja aplicată pentru învățământul preuniversitar în anul școlar 2022-2023, considerăm că majoritatea recomandărilor din **SECȚIUNEA I – Premise pentru aplicarea curriculumului la clasa a X-a în anul școlar 2022-2023**, din cadrul reperelor metodologice elaborate în august 2022 rămân în atenția corpului profesoral și pentru anul școlar 2023-2024.

În acest sens, reamintim că accesarea documentului elaborat anul trecut se poate face la:

<https://www.rocnee.eu/index.php/dcee-oriz/curriculum-oriz/repere-metodologice/reperemetodologice2022>.

Pentru învățământul tehnologic și profesional, la disciplina matematică, colectivul de autori a considerat necesar să se axeze pe elemente de planificare calendaristică (învățământ profesional) și pe dezvoltarea unor secvențe de activități de învățare, atât pentru învățământul profesional, cât și pentru învățământul liceal, filiera tehnologică.



În cadrul acestei secțiuni, propunem un exemplu de planificare calendaristică pentru clasa a XI-a, învățământ profesional, disciplina matematică:

PLANIFICARE CALENDARISTICĂ*

An școlar 2023-2024

-exemplificare-

Unitatea de învățământ	
Localitatea	
Nume și prenume cadru didactic	
Disciplina	Matematică
Clasă	a XI-a
Învățământ liceal/profesional	Învățământ profesional
Filieră	Tehnologică
Profil	
Specializare/Calificare	
Nr. ore/săptămână	1
Nr. săptămâni (de cursuri)	30 din care o săptămână este Săptămâna verde și o săptămână este Săptămâna altfel
Nr. ore de predare-învățare-evaluare	22
Nr. ore la dispoziția profesorului	6

*Conform ordinului nr.4437/2014 pentru aprobarea precizărilor privind programele școlare în învățământul profesional de stat cu durata de 3 ani și în învățământul profesional special și programei școlare aprobate prin Anexa nr. 2 la OMEC nr. 4598 / 31.08.2004, precum și ordinului nr. 3665 din 13 februarie 2023 pentru modificarea Ordinului ministrului educației naționale nr. 3.152/2014 privind aprobarea planurilor-cadru de învățământ pentru învățământul profesional de stat cu durata de 3 ani, clasele a IX-a, a X-a și a XI-a.



Nr. crt.	Competențe generale	Nr. crt.	Competențe specifice	Domeniu de conținut
X_CG_1	Identificarea unor date și relații matematice și corelarea lor în funcție de contextul în care au fost definite	X_CS_1.3	Recunoașterea unor date de tip probabilistic sau statistic în situații concrete	Matematici financiare
		X_CS_1.4	Descrierea unor configurații geometrice analitic sau utilizând vectori	Geometrie
X_CG_2	Prelucrarea datelor de tip cantitativ, calitativ, structural, contextual cuprinse în enunțuri matematice	X_CS_2.3	Interpretarea primară a datelor statistice sau probabilistice cu ajutorul calculului financiar, a graficelor și diagramelor	Matematici financiare
		X_CS_2.4	Descrierea analitică, sintetică sau vectorială a relațiilor de paralelism și perpendicularitate	Geometrie
X_CG_3	Utilizarea algoritmilor și a conceptelor matematice pentru caracterizarea locală sau globală a unei situații concrete	X_CS_3.3	Utilizarea unor algoritmi specifici calculului financiar, statisticii sau probabilităților pentru analiza de caz	Matematici financiare
		X_CS_3.4	Utilizarea informațiilor oferite de o configurație geometrică pentru deducerea unor proprietăți ale acesteia și calcul de distanțe și arii	Geometrie
X_CG_4	Exprimarea caracteristicilor matematice cantitative sau calitative ale unei situații concrete și a algoritmilor de prelucrare a acestora	X_CS_4.3	Transpunerea în limbaj matematic prin mijloace statistice sau probabilistice a unor probleme practice	Matematici financiare
		X_CS_4.4	Exprimarea analitică, sintetică sau vectorială a caracteristicilor matematice ale unei configurații geometrice	Geometrie
X_CG_5	Analiza și interpretarea caracteristicilor matematice ale unei situații-problemă	X_CS_5.3	Analiza și interpretarea unor situații practice cu ajutorul conceptelor statistice sau probabilistice	Matematici financiare
		X_CS_5.4	Interpretarea perpendicularității în relație cu paralelismul și minimul distanței	Geometrie
X_CG_6	Modelarea matematică a unor contexte problematice variate, prin integrarea cunoștințelor din diferite domenii	X_CS_6.3	Corelarea datelor statistice sau probabilistice în scopul predicției comportării unui sistem prin analogie cu modul de comportare în situații studiate	Matematici financiare
		X_CS_6.4	Modelarea unor configurații geometrice analitic, sintetic sau vectorial	Geometrie



Nr. crt.	Unități de învățare	Competențe specifice	Conținuturi	Nr. ore	Săptămâna	Observații/ Interval de cursuri
1	Recapitulare	Competențe specifice asociate programelor claselor IX-X	Exerciții recapitulative	1	S1	I1
2	Matematici financiare	X_CS_1.3 X_CS_2.3 X_CS_3.3 X_CS_4.3 X_CS_5.3 X_CS_6.3	Probleme de numărare: permutări Aranjamente	4	S2-S5	
			Combinări			
	Stagii pregătire practică - 2 săptămâni				S6, S7	
Final I1 – vacanță						
3	Matematici financiare	X_CS_1.3 X_CS_2.3 X_CS_3.3 X_CS_4.3 X_CS_5.3 X_CS_6.3	Elemente de calcul financiar: procente	5	S8-S12	I2
			Dobânzi			
			TVA			
	Stagii pregătire practică - 2 săptămâni				S13, S14	I2
Final M2 – vacanță						
4	Matematici financiare	X_CS_1.3 X_CS_2.3	Culegerea, clasificarea și prelucrarea datelor statistice: date statistice, reprezentarea grafică a datelor statistice	4	S15-S18	I3



		X_CS_3.3 X_CS_4.3 X_CS_5.3 X_CS_6.3	Interpretarea datelor statistice prin parametrii de poziție: medii, dispersia, abateri de la medie.			
			Evenimente aleatoare egal probabile, operații cu evenimente, probabilitatea unui eveniment compus din evenimente egal probabile. Probabilități condiționate.			
Stagii pregătire practică - 1 săptămână					S19	
SĂPTĂMÂNA ALTFEL					S20	
Final M3 – vacanță						
5	Geometrie	X_CS_1.4 X_CS_2.4 X_CS_3.4 X_CS_4.4 X_CS_5.4 X_CS_6.4	Reper cartezian în plan, coordonate carteziene în plan. Distanța dintre două puncte în plan. Coordonatele unui vector în plan; coordonatele sumei vectoriale, coordonatele produsului dintre un vector și un număr real. Ecuația dreptei în plan determinată de un punct și de o direcție dată	7	S21-S27	I4
SĂPTĂMÂNA VERDE					S28	I4
Stagii pregătire practică - 1 săptămână					S29	I4
Final M4 – vacanță						
6	Geometrie	X_CS_1.4 X_CS_2.4 X_CS_3.4	Ecuația dreptei în plan determinată de două puncte distincte. Condiții de paralelism a două drepte din plan	7	S30-S36	I5



		X_CS_4.4 X_CS_5.4 X_CS_6.4	Condiții de perpendicularitate a două drepte din plan		
			Calcul de distanțe și arii.		
Stagii pregătire practică - 1 săptămână				S37	
Vacanța de vară					



Nr. crt.	Competențe generale	Exemple de activități de învățare
X_CG_1	Identificarea unor date și relații matematice și corelarea lor în funcție de contextul în care au fost definite	analiza datelor unei probleme pentru verificarea noncontradicției, suficienței, redundanței și eliminarea datelor neesențiale
		interpretarea parametrilor unei probleme ca o parte a ipotezei acesteia
		utilizarea formulelor standardizate în înțelegerea ipotezei
		exprimarea prin simboluri specifice a relațiilor matematice dintr-o problemă
		analiza secvențelor logice în etapele de rezolvare a unei probleme
		exprimarea rezultatelor rezolvării unei probleme în limbaj matematic
		recunoașterea și identificarea datelor unei probleme prin raportare la sisteme de comparare standard
X_CG_2	Prelucrarea datelor de tip cantitativ, calitativ, structural, contextual cuprinse în enunțuri matematice	compararea, observarea unor asemănări și deosebiri, clasificarea noțiunilor matematice studiate după unul sau mai multe criterii explicite sau implicite, luate simultan sau separat
		folosirea regulilor de generare logică a reperelor sau a formulelor invariante în analiza de probleme
		utilizarea schemelor logice și a diagramelor logice de lucru în rezolvarea de probleme
		formarea obișnuinței de a verifica dacă o problemă este sau nu determinată
		folosirea unor criterii de comparare și clasificare pentru descoperirea unor proprietăți, reguli etc.
X_CG_3	Utilizarea algoritmilor și a conceptelor matematice pentru caracterizarea locală sau globală a unei situații concrete	cunoașterea și utilizarea unor reprezentări variate ale noțiunilor matematice studiate
		folosirea particularizării, a generalizării, a inducției sau analogiei pentru alcătuirea sau rezolvarea de probleme noi, pornind de la o proprietate sau problemă dată
		construirea și interpretarea unor diagrame, tabele, scheme grafice ilustrând situații cotidiene
		exprimarea în termeni logici, cu ajutorul invarianților specifici, a unei rezolvări de probleme
		utilizarea unor repere standard sau a unor formule standard în rezolvarea de probleme
X_CG_4	Exprimarea caracteristicilor matematice cantitative sau calitative ale unei situații concrete și a algoritmilor de prelucrare a acestora	intuirea algoritmului după care este construită o succesiune dată, exprimată verbal sau simbolic și verificarea pe cazuri particulare a regulilor descoperite
		formarea obișnuinței de a recurge la diverse tipuri de reprezentări pentru clasificarea, rezumarea și prezentarea concluziilor unor experimente



		folosirea unor reprezentări variate pentru anticiparea unor rezultate sau evenimente
		intuirea ideii de dependență funcțională
		utilizarea metodelor standard în aplicații în diverse domenii
		redactarea unor demonstrații utilizând terminologia adecvată și făcând apel la propoziții matematice studiate
X_CG_5	Analiza și interpretarea caracteristicilor matematice ale unei situații-problemă	identificarea și descrierea cu ajutorul unor modele matematice, a unor relații sau situații multiple
		imaginarea și folosirea creativă a unor reprezentări variate pentru depășirea unor dificultăți
		exprimarea prin metode specifice a unor clase de probleme; formarea obișnuinței de a căuta toate soluțiile sau de a stabili unicitatea soluțiilor; analiza rezultatelor
		identificarea și formularea a cât mai multor consecințe posibile ce decurg dintr-un set de ipoteze
		verificarea validității unor afirmații, pe cazuri particulare sau prin construirea unor exemple și contraexemple
		folosirea unor sisteme de referință diferite pentru abordarea din perspective diferite ale unei noțiuni matematice
X_CG_6	Modelarea matematică a unor contexte problematice variate, prin integrarea cunoștințelor din diferite domenii	analiza rezolvării unei probleme din punctul de vedere al corectitudinii, al simplității, al clarității și al semnificației rezultatelor
		reformularea unei probleme echivalente sau înrudite
		rezolvarea de probleme și situații-problemă
		folosirea unor reprezentări variate ca punct de plecare pentru intuirea, ilustrarea, clarificarea sau justificarea unor idei, algoritmi, metode, căi de rezolvare etc.
		transferul și extrapolarea soluțiilor unor probleme pentru rezolvarea altora
		folosirea unor idei, reguli sau metode matematice în abordarea unor probleme practice sau pentru structurarea unor situații diverse
		expunerea de metode standard sau nonstandard ce permit modelarea matematică a unor situații
		analiza capacității metodelor de a se adapta unor situații concrete
		utilizarea rezultatelor și a metodelor pentru crearea de strategii de lucru



În cadrul acestei secțiuni, propunem următoarele secvențe de activitate pentru clasa a XI-a, învățământ profesional:

- 1 – PROCENTE. TVA
- 2 – DOBÂNZI
- 3 – BUGETUL FAMILIEI

SECVENȚE DE ACTIVITATE 1 - PROCENTE. TVA

Titlu	PROCENTE. TAXA PE VALOAREA ADĂUGATĂ (TVA)
Tip de activități	Interactive, aplicative
Competențe specifice vizate	CS3. Utilizarea unor algoritmi specifici calculului procentual și financiar. CS5. Analiza și interpretarea unor situații practice cu ajutorul datelor financiare.
Resurse implicate	<ul style="list-style-type: none"> ● Tablă interactivă/ecran pentru a prezenta informațiile și a lucra în timp real cu elevii. ● Calculator și software/aplicații pentru calcule financiare (EXCEL, foi de calcul din Google Drive etc.).
Strategii utilizate	<ul style="list-style-type: none"> ● Brainstorming: Elevii vor fi încurajați să participe la discuții în grup pentru actualizarea informațiilor cu calcule de procente, calculul TVA și problemele practice privind ieftiniri și scumpiri de diverse produse. ● Demonstrare interactivă: Profesorul va prezenta interactiv pe tablă/ecran, modalitățile de calcul cu procente și aplicarea algoritmilor de calcul la ieftiniri și scumpiri de produse. ● Demonstrare interactivă: Profesorul va prezenta interactiv pe tablă/ecran, modalitățile de calcul ale TVA și aplicarea algoritmului de calcul a TVA în diferite situații. ● Lucru în echipe: Elevii vor fi împărțiți în perechi și vor rezolva problemele practice din fișele de lucru și în echipe/grupe pentru rezolvarea situațiilor problemă. ● Probleme practice: Elevii vor primi exemple concrete de situații din domeniul financiar, unde vor trebui să aplice/efectueze calcule de procente și TVA (interpretare informații de pe bonuri fiscale, facturi etc.).
ACTIVITĂȚI DE ÎNVĂȚARE ȘI EVALUARE	
Introducere (7 minute)	<ul style="list-style-type: none"> ● Profesorul prezintă contextul activității, reamintește modul de calcul al procentelor și explică importanța procentelor în calcule financiare prin aplicarea în calculul de TVA. Realizează evaluarea inițială: https://docs.google.com/presentation/d/1upB1sCQYZxQnVCZkhQHKtAFRLbpFHH-p6CjEYVb---o/edit?usp=sharing și completează împreună cu elevii prima parte a tabelului „Știu-Vreau să știu-Am învățat”: https://docs.google.com/document/d/1HpN4KLzePIs6jB82M75eOu57NQYnHgYk6L7FgVbWfP0/edit?usp=sharing ● Elevii primesc 1-2 exemple simple de calcul procentual și se discută cum se pot aplica algoritmi de calcul pentru TVA
Evaluare și feedback (3 minute)	<p>Cerință de evaluare: Elevii trebuie să explice modul de calcul prin aplicarea unor procente și să identifice și să diferențieze TVA de pe un bon fiscal sau factură</p> <p>Cerință îndeplinită în condițiile în care:</p> <ul style="list-style-type: none"> – calculează procente în situații simple – identifică procentele și sumele ce corespund TVA pe un bon fiscal sau o factură



<p>Demonstrare interactivă și discuție (10 minute)</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Profesorul prezintă interactiv pe tablă sau pe ecran, modul în care se calculează ieftinirile/scumpirile exprimate în procente ale unor produse și TVA în diferite situații și cum se interpretează informațiile de pe un bon fiscal sau factură. Material utilizat: https://docs.google.com/presentation/d/1WJ4x2nMG0jezX4LXS2uFUvvnv4UyJZ2peE8zPtjeiwV4/edit?usp=sharing • Elevii participă activ, adresând întrebări și propunând idei.
<p>Evaluare feedback (5 minute)</p>	<p>Cerință de evaluare: Elevii trebuie să rezolve în perechi problemele din fișele de lucru https://drive.google.com/file/d/1WF0BmJvUVUQyq56Rws-NYH_4OZeBQxtA/view?usp=drive_link și https://drive.google.com/file/d/1gC7N87sEtPfxT1mjFjNc0hUF7FqqQIEv/view?usp=drive_link</p>
<p>Lucru în echipe (10 minute)</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Elevii sunt împărțiți în echipe și primesc câteva situații problemă practice pe care trebuie să le rezolve în echipă: https://drive.google.com/file/d/1_zZNgt_R0eKLq6MMiv0e2coyCKEEREwS/view?usp=sharing • Elevii din fiecare echipă lucrează împreună pentru a identifica soluțiile și pentru a găsi rezultatele în funcție de situațiile problemă pe care le au de rezolvat.
<p>Prezentare și discuție (2 minute)</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Fiecare echipă prezintă soluțiile găsite și argumentează alegerile lor. • Profesorul încurajează discuțiile între echipe pentru a explora mai multe strategii de rezolvare.
<p>Evaluare colegială, feedback (3 minute)</p>	<p>Cerință de evaluare: Fiecare echipă trebuie să prezinte soluția găsită și să argumenteze rezultatele obținute.</p>
<p>Sinteză și concluzii (5 minute)</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Profesorul rezumă modul de calcul cu procente, calculul TVA și metodele abordate în activitate. • Elevii sunt încurajați să reflecteze asupra importanței calculelor în care se utilizează procente și să identifice alte situații în care pot aplica cunoștințele dobândite, în afara calculului TVA. • Profesorul le comunică elevilor tema de casă: https://drive.google.com/file/d/1lmSK-2wXiSw3gm5qPSQBgfkbGOyvMVuE/view?usp=drive_link
<p>Autoevaluare și feedback (5 minute)</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Elevii vor scrie un jurnal în care vor reflecta asupra modului în care au abordat situațiile problemă, cum au colaborat cu colegii de echipă și ce au învățat despre aplicarea procentelor în contextul calculului TVA. • Vor discuta, de asemenea, cum pot aplica aceste concepte și abilități în situații reale din domeniul financiar, de exemplu în situația ieftinirii/scumpirii a diferitelor produse. • Se va completa fișa de feed-back: https://drive.google.com/file/d/19fHt5ic12kn0gpYPSE7mqEtQlvMQk4JL/view?usp=sharing

Exemplu de „item - punct de control”:

Conținut: Procente. TVA

CS3. Utilizarea unor algoritmi specifici calculului procentual și financiar

Un obiect costă 2500 de lei (fără TVA). Care dintre afirmațiile de mai jos este adevărată?

- A) Dacă se ieftinește cu 20%, obiectul va costa 2100 lei.
- B) Dacă se scumpește cu 10%, obiectul va costa 2700 de lei.
- C) Suma ce corespunde la TVA de 19%, pentru obiectul, dat este 475 de lei.
- D) Prețul total cu TVA al obiectului este de 3000 de lei.



Răspunsul corect este C. Se calculează prin aplicarea procentului de 19% la suma de 2500 de lei.

Elevii care aleg răspunsul A probabil că au calculat eronat procentul pentru prețul obiectului, cu erori la efectuarea scăderii, în cazul ieftinirii.

Elevii care aleg răspunsul B probabil că au calculat eronat procentul pentru prețul obiectului, cu erori la efectuarea adunării în cazul scumpirii.

Elevii care aleg răspunsul D nu adună corect TVA la prețul inițial al obiectului, pentru a obține prețul cu TVA.

Exemplu de serie de itemi pentru identificarea nivelului de dezvoltare a competenței

CS5. **Analiza și interpretarea** unor situații practice cu ajutorul datelor financiare

Item 1.

Un obiect costă 300 de lei. Care dintre afirmațiile de mai jos este adevărată?

- A) Dacă se ieftinește cu 10% obiectul va costa 330 de lei.
- B) Dacă se scumpește cu 20% obiectul va costa 360 de lei.
- C) O ieftinire cu 15% este echivalentă cu creșterea prețului cu 45 de lei.
- D) O scumpire cu 25% este echivalentă cu scăderea prețului cu 75 de lei.

Răspuns corect B.

Item 2.

Un obiect costă 300 de lei (fără TVA). Care dintre afirmațiile de mai jos este adevărată?

- A) Valoarea TVA pentru obiect este de 54 de lei.
- B) Prețul cu TVA al obiectului este 360 de lei.
- C) Valoarea TVA pentru două achiziții a obiecte de același fel cu prețul dat este de 114 lei.
- D) Prețul cu TVA a trei obiecte de același fel este de 470 de lei.

Răspuns corect C.

Item 3.

Un grup format din 30 de elevi merge într-o excursie la Muzeul Satului din București. Știind că un bilet costă 15 lei (fără TVA), care dintre afirmațiile de mai jos este corectă ?

- A) Grupul va plăti suma totală de 450 de lei.
- B) Grupul va plăti suma totală de 535,5 lei.
- C) Grupul va plăti suma totală de 490,5 lei.
- D) Grupul va plăti suma totală de 472,5 lei.

Răspuns corect D.

Exemplu de serie de itemi evaluare continuă

C2. **Analiza și interpretarea** unor situații practice cu ajutorul datelor financiare

1. Completați tabelul de mai jos utilizând **EXCEL** sau **Foi de calcul** din Google Drive:

Preț inițial (în lei)	Preț după o ieftinire cu...		Preț după o scumpire cu ...	
500	20%		15%	
4800	25%		10%	
10000	40%		18%	



2. Completați tabelul de mai jos utilizând **EXCEL** sau **Foi de calcul** din Google Drive:

Preț inițial (în lei)	Cota TVA	Preț (cu TVA) după o ieftinire cu....		Preț (cu TVA) după o scumpire cu ...	
350	9%	25%		20%	
4000	19%	10%		15%	
200	5%	15%		10%	

3. Aveți atașată o secvență dintr-un bon fiscal.

(https://drive.google.com/file/d/1QOLzEv69r0wrl3A6oFVh5KhDE8o2w2e_/view?usp=sharing)

Casier: 637 Casa: 6

NR.Intern (006-409941) 4572

Nr. Client: ****_****8 02 SC

Mod amb	Pret MU	Cant.	Valoare fara TVA	Discount fara TVA	Valoare cu discount fara TVA	TVA %	Valoare totala cu TVA	Unit. vanz.	Pret unit. cu disc. fara TVA	
3	4	5	6=4*5	7	8=6+7	9	10=8+9*8	11	12=(11*5)	
ES 15%	PA	5,93	1	5,93	1,78-	4,15	9	4,52	1	4,15
	KG	12,65	1	12,65	3,79-	8,86	9	9,66	0,862	10,27
	KG	14,11	1	14,11	4,23-	9,88	9	10,77	0,962	10,27
	KG	18,37	1	18,37		18,37	9	20,02	1,432	12,83
PORC	KG	14,09	1	14,09	4,23-	9,86	9	10,75	0,939	10,50
PORC	KG	14,21	1	14,21	4,26-	9,95	9	10,85	0,947	10,50
	KG	8,08	1	8,08		8,08	9	8,81	0,518	15,59
	KG	52,78	1	52,78	2,59-	50,19	9	54,71	10,370	4,84
TERSIC	IM	9,72	3	29,16	1,20-	27,96	19	33,27	4	2,33
ANANA	IM	9,72	3	29,16	1,20-	27,96	19	33,27	4	2,33
	IM	27,66	1	27,66		27,66	19	32,92	6	4,61
	IM	14,28	2	28,56	0,88-	27,68	9	30,18	6	2,31
/1,1/	BU	14,71	1	14,71		14,71	19	17,50	1	14,71
Total ambalaje				Total val. fara TVA	Discount fara TVA	Total+disc. fara TVA		Total val. cu TVA		
0				269,47	24,16-	245,31		277,22		

Răspundeți la următoarele întrebări:

- Câte cote de TVA apar în acest bon fiscal?
- Care este cea mai mare valoare TVA plătită la un produs de pe acest bon fiscal?
- Care este suma totală cu TVA achitată pe acest bon fiscal?
- Care este cea mai mică valoare fără TVA de pe acest bon fiscal?
- Care este cea mai mare valoare cu TVA plătită pe acest bon fiscal?



SECVENȚE DE ACTIVITATE 2 – DOBÂNZI

Titlu	DOBÂNZI
Tip de activități	Interactive, aplicative
Competențe specifice vizate	CS3. Utilizarea unor algoritmi specifici calculului procentual și financiar. CS5. Analiza și interpretarea unor situații practice cu ajutorul datelor financiare.
Resurse implicate	<ul style="list-style-type: none"> • Tablă interactivă/ecran pentru a prezenta informațiile și a lucra în timp real cu elevii. • Calculator și software/aplicații pentru calcule financiare (EXCEL, foi de calcul din Google Drive etc.)
Strategii utilizate	<ul style="list-style-type: none"> • Brainstorming: Elevii vor fi încurajați să participe la discuții în grup pentru actualizarea informațiilor cu calcule de procente și definirea în cuvinte proprii a termenilor de instituție bancară, dobândă, credit, plasament/depozit. • Demonstrare interactivă: Profesorul va prezenta interactiv pe tablă/ecran, modalitățile de calcul a dobânzilor în diferite contexte. • Lucru în echipe: Elevii vor fi împărțiți în perechi și vor rezolva problemele practice din fișele de lucru și în echipe/grupe pentru rezolvarea situațiilor problemă. • Probleme practice: Elevii vor primi exemple concrete de situații din domeniul financiar, unde vor trebui să aplice cunoștințele cu calcul de dobânzi, pentru credite și plasamente/depozite.
ACTIVITĂȚI DE ÎNVĂȚARE ȘI EVALUARE	
Introducere (5 minute)	<ul style="list-style-type: none"> • Profesorul prezintă contextul activității, reamintește modul de calcul al procentelor și explică importanța procentelor în calculul de dobânzi. • Elevii primesc 1-2 exemple simple de calculul dobânzilor și se discută cum se pot diferenția dobânda simplă de cea compusă.
Evaluare și feedback (5 minute)	<p>Cerință de evaluare: Elevii trebuie să explice modul de calcul al dobânzilor, diferențiind dobânda simplă de dobânda compusă.</p> <p>Cerință îndeplinită în condițiile în care:</p> <ul style="list-style-type: none"> – calculează dobânzi în situații simple; – identifică și diferențiază dobânda simplă de cea compusă.
Demonstrare interactivă și discuție (12 minute)	<ul style="list-style-type: none"> • Profesorul prezintă interactiv pe tablă sau pe ecran, modul în care se calculează dobânzile pentru diferite credite sau plasamente/depozite în diferite situații și cum se interpretează informațiile instituțiilor bancare referitoare la dobânzi. Material utilizat: https://docs.google.com/presentation/d/1OwDIGaP9xEo7lUrm3BDINN5mG8zbc_5L1GdRIUquX4s/edit?usp=sharing • Elevii participă activ, adresând întrebări și propunând idei.
Evaluare și feedback (10 minute)	<p>Cerință de evaluare: Elevii trebuie să rezolve, în perechi, cel puțin o problemă din una dintre fișele de lucru https://drive.google.com/file/d/1F4E8oGp53habu850kyhSU-ihlykHEMc4/view?usp=sharing</p>
Lucru în echipe (5 minute)	<ul style="list-style-type: none"> • Elevii sunt împărțiți în echipe și primesc câteva situații problemă practice pe care trebuie să le rezolve: https://drive.google.com/file/d/1FkID5vn40p3E_NDVvDYVEgne_E86R3Cl/view?usp=drive_link • Fiecare echipă lucrează împreună pentru a identifica soluțiile și pentru a găsi rezultatele în funcție de situațiile problemă pe care le au de rezolvat.
Prezentare și discuție	<ul style="list-style-type: none"> • Fiecare echipă prezintă soluțiile găsite și argumentează alegerile lor.



(4 minute)	<ul style="list-style-type: none"> Profesorul încurajează discuțiile între echipe pentru a explora mai multe strategii de rezolvare.
Evaluare colegială, feedback (2 minute)	<p>Cerință de evaluare: Fiecare echipă trebuie să prezinte soluția găsită și să argumenteze rezultatele obținute.</p>
Sinteză și concluzii (3 minute)	<ul style="list-style-type: none"> Profesorul rezumă modul de calcul al dobânzilor și metodele abordate în activitate. Elevii sunt încurajați să reflecteze asupra importanței calculelor pentru dobânzi și să identifice și alte situații în care pot aplica cunoștințele dobândite, în afara calculului simplu de dobânzi. Profesorul le comunică elevilor tema de casă: https://drive.google.com/file/d/1XGqn8AxpqYqQeIAqi4TIFU4sc4Ht858Q/view?usp=drive_link
Autoevaluare și feedback (4 minute)	<ul style="list-style-type: none"> Elevii vor scrie un jurnal în care vor reflecta asupra modului în care au abordat situațiile problemă, cum au colaborat cu colegii de echipă și ce au învățat despre calcularea dobânzilor în diferite situații. Vor discuta, de asemenea, cum pot aplica aceste concepte și abilități în situații reale din domeniul financiar, de exemplu în situația achiziționării unui computer sau a unui autoturism. Se va completa fișa de feed-back: https://drive.google.com/file/d/19fHt5ic12kn0gpYPSE7mqEtQlvMQk4JL/view?usp=sharing

Exemplu de „item - punct de control”:

Conținut: Procente. TVA

CS3. **Utilizarea** unor algoritmi specifici calculului procentual și financiar

O persoană împrumută de la o instituție bancară suma de 10000 de lei cu dobândă simplă de 15% pe o perioadă de 6 luni. Care dintre afirmațiile de mai jos este adevărată?

- A. Dobânda plătită la acest credit este de 1500 de lei.
- B. Dobânda plătită la acest credit este de 750 de lei.
- C. Suma totală rambursată este de 17500 de lei.
- D. Suma totală rambursată este de 11500 de lei.

Răspunsul corect este B. Se calculează prin aplicarea procentului de 15% la suma de 10000 de lei pe o perioadă de 6 luni.

Elevii care aleg răspunsul A probabil că au calculat eronat dobânda, neluând în considerare perioada.

Elevii care aleg răspunsul C probabil că au calculat eronat suma de rambursat, cu erori în efectuarea adunării dintre sumă inițială și dobândă.

Elevii care aleg răspunsul D nu adună corect dobânda corespunzătoare la suma de rambursat.

Exemplu de serie de itemi pentru identificarea nivelului de dezvoltare a competenței

CS5. **Analiza și interpretarea** unor situații practice cu ajutorul datelor financiare

Item 1.

O persoană împrumută de la o instituție bancară suma de 15000 de lei pe o perioadă de 2 ani, cu o rată a dobânzii de 8%. Care dintre afirmațiile de mai jos este adevărată?

- A. Dobânda simplă calculată pentru întreaga perioadă este de 1200 de lei.
- B. Dobânda simplă calculată pentru întreaga perioadă este de 2400 de lei.
- C. Dobânda compusă calculată pentru întreaga perioadă este de 2400 de lei.
- D. Dobânda compusă calculată pentru întreaga perioadă este de 3000 de lei.

Răspuns corect B.

**Item 2.**

O persoană depune la o instituție bancară suma de 20000 de lei pe o perioadă de 3 ani, cu o rată a dobânzii de 6%. Care dintre afirmațiile de mai jos este adevărată?

- A. Dobânda simplă calculată pentru întreaga perioadă este de 2400 de lei.
- B. Dobânda simplă calculată pentru întreaga perioadă este de 224000 de lei.
- C. Dobânda simplă calculată pentru întreaga perioadă este de 3600 de lei.
- D. Dobânda compusă calculată pentru întreaga perioadă este de 23600 de lei.

Răspuns corect C.

Item 3.

Aveți de depus la o bancă suma de 5000 de lei pe o perioadă de 6 luni. Aveți atașat un link care prezintă variantele de dobânzi oferite de mai multe instituții bancare pentru acest plasament /depozit cu comisioanele aferente:

<https://www.expertulbanilor.ro/dobanzi-depozite/>

Accesând acest link completați spațiile libere de mai jos astfel încât să obțineți propoziții adevărate.

- A. Cel mai eficient câștig din plasamentul depus este oferit de instituția bancară, cu o rată a dobânzii de și un câștig net de
- B. Cea mai ineficientă rată a dobânzii la plasamentul de 5000 de lei este oferită de instituția bancară, rata dobânzii fiind de
- C. Cea mai mare rată de dobândă este oferită de instituția bancară
- D. Dați exemple de două instituții bancare care oferă aceeași rată a dobânzii: și

Răspunsuri (conform accesare link la data de 11.08.2023):

- A. Instituția bancară: BRD; rata dobânzii: 7,80%; câștig net: 175,5 lei
- B. Instituția bancară: BRCI; rata dobânzii: 0,5%; câștig net: 11,3 lei
- C. Cea mai mare rată a dobânzii: BRD.
- D. ALPHA Bank și BRD oferă o rată a dobânzii de 7,2%.

Exemplu de serie de itemi evaluare continuă

CS5. **Analiza și interpretarea** unor situații practice cu ajutorul datelor financiare

1. Dorești să achiziționezi un computer performant, al cărui preț este de 10.000 de lei. Știind că pentru această achiziție ai nevoie de un credit de nevoi personale pe o durată de 3 ani, ai prezentat un link care conține mai multe variante de creditare de la diferite instituții bancare. Analizând aceste variante, alege varianta cea mai convenabilă pentru achiziția acestui computer.

Link: <https://www.expertulbanilor.ro/credite-nevoi-personale/>

2. Părinții tăi doresc să achiziționeze un autoturism nou în valoare de 1.250.000 lei cu ajutorul unui credit pe o perioadă de 5 ani și au nevoie de acest credit pentru această achiziție. Ai asociat un link care conține mai multe variante de credite auto. Analizând aceste variante, alege varianta cea mai convenabilă pentru achiziția acestui autoturism.

Link: <https://www.expertulbanilor.ro/credite-auto/>



SECVENȚE DE ACTIVITATE 3 - BUGETUL FAMILIEI

Titlu	BUGETUL FAMILIEI
Tip de activități	Interactive, aplicative
Competențe specifice vizate	CS3. Utilizarea unor algoritmi specifici calculului financiar. CS5. Analiza și interpretarea unor situații practice cu ajutorul datelor financiare.
Resurse implicate	<ul style="list-style-type: none"> ● Tablă interactivă/ecran pentru a prezenta informațiile și a lucra în timp real cu elevii. ● Calculator și software/aplicații pentru calcule financiare (EXCEL, foi de calcul din Google Drive etc.).
Strategii utilizate	<ul style="list-style-type: none"> ● Brainstorming: Elevii vor fi încurajați să participe la discuții în grup pentru însușirea informațiilor cu privire la buget în general și la bugetul familiei în particular, stabilind împreună cu profesorul tipurile de venituri și cheltuieli ale unei familii. ● Demonstrare interactivă: Profesorul va prezenta interactiv pe tablă/ecran, alcătuirea unui buget focalizându-se pe bugetul familiei. ● Lucru în echipe: Elevii vor lucra individual la completarea fișei care conține situația problemă pentru bugetul familiei și în echipe completând o astfel de fișă, cu date ipotetice și apoi se vor discuta frontal fișele completate. ● Probleme practice: Elevii vor primi exemple concrete de realizarea unui buget, cu stabilirea concretă a veniturilor și cheltuielilor.
ACTIVITĂȚI DE ÎNVĂȚARE ȘI EVALUARE	
Introducere (5 minute)	<ul style="list-style-type: none"> ● Profesorul prezintă contextul activității, precizând însemnătatea unui buget și modul lui de alcătuire. ● Elevii primesc câteva exemple simple de venituri și cheltuieli ale unei familii.
Evaluare și feedback (3 minute)	<p>Cerință de evaluare: Elevii trebuie să explice ce înseamnă venituri și ce înseamnă cheltuieli.</p> <p>Cerință îndeplinită în condițiile în care:</p> <ul style="list-style-type: none"> – exemplifică mai multe tipuri de venituri (pensii, salarii, alocații, burse etc.), permanente, ocazionale etc. – identifică și diferențiază cheltuielile zilnice, săptămânale, lunare, trimestriale, semestriale, anuale.
Demonstrare interactivă și discuție (12 minute)	<ul style="list-style-type: none"> ● Profesorul prezintă interactiv pe tablă sau pe ecran, modul în care se calculează veniturile unei familii, luând în considerare toate tipurile de venituri, permanente sau ocazionale. ● Material utilizat: https://docs.google.com/presentation/d/130yXIPaJvWH3X15V2BvLrw8E3YBwjIPjWC_Z0armdLA/edit?usp=sharing ● Profesorul prezintă interactiv pe tablă sau pe ecran, modul în care se calculează cheltuielile unei familii, luând în considerare toate tipurile de cheltuieli, clasificându-le în funcție de perioadă (zilnice, săptămânale, lunare, trimestriale, semestriale, anuale). ● Elevii participă activ, adresând întrebări și propunând idei.
Evaluare și feedback (5 minute)	<p>Cerință de evaluare:</p> <ul style="list-style-type: none"> ● Elevii trebuie să rezolve individual problemele din fișa de lucru cu bugetul familiei: https://drive.google.com/file/d/1lwym6aTxTsQVdFIkPb6rC4UwBt3JzBMq/view?usp=sharing ● Elevii trebuie să rezolve în echipă fișa de lucru cu bugetul familiei completată cu date ipotetice, rezolvând situația problemă dată:



	https://drive.google.com/file/d/1pHM42zis13bicDjk7ORTYKUp08thtfvI/view?usp=drive_link
Lucru în echipe (5 minute)	<ul style="list-style-type: none"> Elevii sunt împărțiți în echipe și primesc câte o fișă completată cu date ipotetice, urmând să facă analiza solicitată în fișa de lucru. Fiecare echipă lucrează împreună pentru a identifica soluțiile și pentru a găsi rezultatele în funcție de situațiile problemă pe care le au de rezolvat.
Prezentare și discuție (5 minute)	<ul style="list-style-type: none"> Fiecare echipă prezintă fișa completată și argumentează alegerile răspunsului. Profesorul încurajează discuțiile între echipe pentru a explora mai multe strategii de rezolvare.
Evaluare colegială, feedback (5 minute)	<p>Cerință de evaluare: Fiecare echipă trebuie să prezinte soluția găsită și să argumenteze rezultatele obținute.</p>
Sinteză și concluzii (3 minute)	<ul style="list-style-type: none"> Profesorul rezumă modul de realizare a bugetului familiei și informațiile necesare la întocmirea acestui buget. Elevii sunt încurajați să reflecteze asupra importanței realizării bugetului familiei. Profesorul le comunică elevilor tema de casă: completarea fișei pentru bugetul familiei: https://docs.google.com/document/d/1Y7CI2wDd7bDI-nbTs5AGNh4aKFKOpmXPOrNv-9i-reI/edit?usp=sharing
Evaluare finală (5 minute)	<ul style="list-style-type: none"> Elevii rezolvă fișa de evaluare finală https://drive.google.com/file/d/1u3IaCpCVvA244Xgez45cW_N0cabW2MiL/view?usp=sharing
Autoevaluare și feedback (2 minute)	<ul style="list-style-type: none"> Elevii vor scrie un jurnal în care vor reflecta asupra modului în care au abordat situațiile problemă, cum au colaborat cu colegii de echipă și ce au învățat despre bugetul familiei. Vor discuta, de asemenea, cum pot aplica aceste concepte și abilități în situații reale din domeniul financiar, de exemplu în situația achiziționării unui computer sau unui autoturism. Se va completa fișa de feed-back: <p>https://drive.google.com/file/d/19fHt5ic12kn0gpYPSE7mqEtQlvMQk4JL/view?usp=sharing</p>

Exemplu de „item - punct de control”:

Conținut: Procente. TVA

CS3. **Utilizarea** unor algoritmi specifici calculului financiar

O familie realizează un venit lunar de 9000 de lei. Cheltuielile lunare ale acestei familii totalizează 7500 de lei. Alegeți propoziția adevărată dintre enunțurile de mai jos:

- Familia economisește anual 1500 de lei.
- Familia nu poate realiza economii.
- Familia economisește anual 18000 de lei.
- Familia are cheltuielile mai mari decât veniturile.

Răspunsul corect este C. Se calculează prin determinarea economiilor într-o lună în sumă de 1500 de lei, iar anual economiile lunare se vor obține prin înmulțirea cu numărul de luni din an, $1500 \times 12 = 18000$ de lei.

Elevii care aleg răspunsul A calculează doar economiile dintr-o lună, nu și cele anuale.

Elevii care aleg răspunsul B nu înțeleg că economiile sunt obținute ca diferență dintre venituri și cheltuieli.

Elevii care aleg răspunsul D fac confuzie între venituri și cheltuieli.

Exemplu de serie de itemi pentru verificarea nivelului de dezvoltare a competenței

CS5. **Analiza și interpretarea** unor situații practice cu ajutorul datelor financiare

**Item 1.**

O familie realizează venituri și cheltuieli pe o perioadă de 3 luni conform următorului tabel:

Luna	Venituri	Cheltuieli
Luna 1	5600 de lei	5300 de lei
Luna 2	6200 de lei	6300 de lei
Luna 3	7000 de lei	6900 de lei

Stabiliți dacă după cele 3 luni familia a realizat economii și, dacă da, care este suma ce corespunde acestor economii.

Răspuns: Da, familia a realizat economii în valoare de 300 de lei.

Item 2.

Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

Enunț	Adevărat	Fals
a) Dacă o familie realizează un total de 7500 de lei lunar și are 6800 de lei cheltuieli lunar, după 6 luni familia a realizat o economie de 4000 de lei.		
b) În veniturile lunare al unei familii se consideră și premiile sau cadourile în bani.		
c) Dacă o familie realizează anual un venit de 96000 de lei, atunci venitul mediu lunar este de 8000 de lei.		
d) Dacă lunar o familie are cheltuieli de 5000 de lei, atunci cheltuielile anuale însumează 30000 de lei.		

Răspunsuri: a) – F; b) – A; c) – A; d) F.

Item 3.

O familie realizează venituri și cheltuieli pe o perioadă de un an conform următorului tabel:

Luna	Venituri	Cheltuieli
Luna 1	6000 de lei	5800 de lei
Luna 2	6500 de lei	6300 de lei
Luna 3	7000 de lei	6900 de lei
Luna 4	6000 de lei	5500 de lei
Luna 5	6800 de lei	6300 de lei
Luna 6	6200 de lei	6500 de lei
Luna 7	6300 de lei	6000 de lei
Luna 8	6000 de lei	5800 de lei
Luna 9	6200 de lei	5800 de lei
Luna 10	6500 de lei	6000 de lei
Luna 11	6000 de lei	5800 de lei



Luna 12	7200 de lei	6800 de lei
---------	-------------	-------------

- a) Stabiliți dacă după primele 6 luni familia poate să meargă într-o vacanță care are costuri totale de 2400 de lei.
b) Dar după un an, familia poate merge în vacanța care costă 2400 de lei?

Răspunsuri:

- a) Nu, nu poate deoarece a realizat economii de doar 1200 de lei.
b) Da, pentru că după 1 an a realizat economii de 3200 de lei.

Exemplu de serie de itemi evaluare continuă

CS5. Analiza și interpretarea unor situații practice cu ajutorul datelor financiare.

O familie realizează venituri și cheltuieli pe o perioadă de un an conform următorului tabel:

Luna	Venituri	Cheltuieli	Economii/datorii
Luna 1	7000 de lei	6800 de lei	
Luna 2	7500 de lei	7300 de lei	
Luna 3	8000 de lei	7900 de lei	
Luna 4	7000 de lei	6500 de lei	
Luna 5	7800 de lei	7300 de lei	
Luna 6	7200 de lei	7500 de lei	
Luna 7	7300 de lei	7000 de lei	
Luna 8	7000 de lei	6800 de lei	
Luna 9	7200 de lei	6800 de lei	
Luna 10	7500 de lei	7000 de lei	
Luna 11	7000 de lei	6800 de lei	
Luna 12	8200 de lei	7800 de lei	
Total			

- a) Completați, pentru fiecare lună, coloana pentru economii/datorii.
b) Calculați sumele totale pentru întregul an.
c) Stabiliți dacă după primele 6 luni familia poate să meargă într-o vacanță care are costuri totale de 1800 de lei.
d) Ce economii a reușit să facă familia după 6 luni? Dar după un an?
e) Există luni în care familia are datorii?
f) După un an, familia poate merge într-o vacanță care costă 3000 de lei?

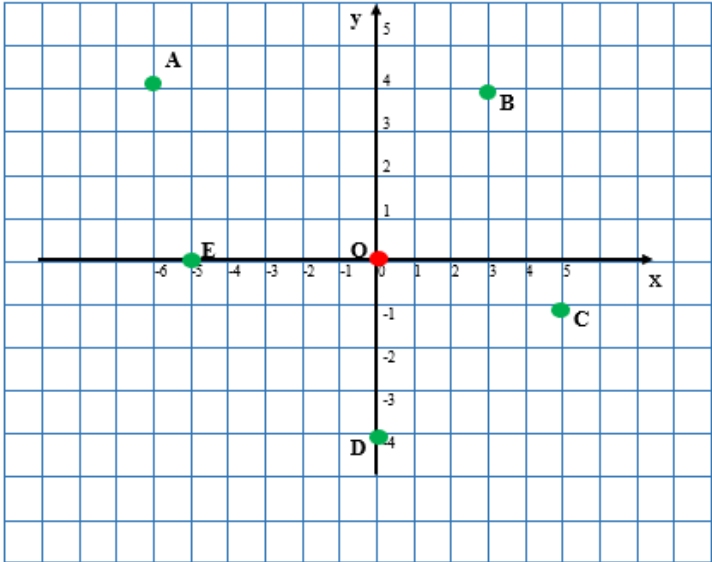


În cadrul acestei secțiuni, propunem următoarele secvențe de activitate pentru clasa a XI-a, învățământ profesional:

- 1 – REPER CARTEZIAN. CALCULUL DISTANȚELOR

SECVENȚE DE ACTIVITATE
1 – REPER CARTEZIAN. CALCULUL DISTANȚELOR

Titlu	Reper cartezian în plan. Coordonate carteziene în plan. Distanța dintre două puncte din plan
Tip de activități	Interactive, aplicative
Competențe specifice vizate	CS1. Descrierea unor configurații geometrice analitic sau utilizând vectori CS3. Utilizarea informațiilor oferite de o configurație geometrică pentru deducerea unor proprietăți ale acesteia și calculul de distanțe și arii
Resurse implicate	1. Tablă interactivă/ecran videoproiector, pentru a prezenta informațiile și a lucra în timp real cu elevii. 2. Calculator/telefon mobil pentru accesarea aplicațiilor online, acces la internet.
Strategii utilizate	1. Icebreacking: Elevii sunt invitați să-și reamintească elemente matematice aflate în relație cu noțiunea de <i>reper cartezian</i> , introdusă anterior (de exemplu, la capitolul <i>Funcții</i> , în clasa a IX-a, dar nu numai). 2. Demonstrare interactivă: Profesorul va prezenta interactiv, pe tabla smart sau pe ecran, procesul/procedeul de introducere a noțiunii matematice. 3. Lucru în echipe: Elevii vor fi împărțiți în echipe mici și vor rezolva, în colaborare, cerințe legate de noțiunea de <i>reper cartezian</i> , <i>coordonate</i> , <i>distanțe</i> . 4. Probleme practice: Elevii vor primi exemple concrete de situații din domeniul economic, tehnic sau dintr-un alt domeniu de activitate, unde vor trebui să aplice cunoștințele despre reprezentarea punctelor/asocierea coordonatelor, distanța dintre două puncte.
Activități de învățare și evaluare	
Introducere (5 minute)	<ul style="list-style-type: none"> Elevii sunt invitați să-și reamintească elemente matematice aflate în relație cu noțiunea de <i>reper cartezian</i>, introdusă anterior. Apoi sunt invitați să menționeze situații practice în care se folosesc coordonate și este util calculul/estimarea unor distanțe.
Evaluare și feedback (5 minute)	<p>Cerință de evaluare: Elevii trebuie să noteze minimum 10 termeni matematici aflați în relație cu noțiunea de <i>reper cartezian</i>.</p> <p>Cerință îndeplinită în condițiile în care:</p> <ul style="list-style-type: none"> - elevii notează minimum 10 termeni, dintre care minimum 2 sunt menționați de mai mulți elevi - elevii își notează în caiet cuvintele găsite Exemple posibile: axe, abscisă, ordonată, coordonate, perpendiculare, pozitiv, negativ, vector, sens, origine etc. <p>Cuvintele pot fi notate pe tablă sau profesorul poate trimite elevilor link pentru aplicația <i>Mentimeter</i>: https://www.menti.com/alcxexj2178a (Elevii vor folosi telefoanele mobile sau calculatoarele din sală, se vor conecta în baza codului comunicat de profesor și vor completa cuvântul/cuvintele dorite. Pe tabla smart/videoproiector se afișează în timp real configurația obținută, cuvintele cel mai des notate fiind scrise evidențiat).</p>

	<p>Cerință de evaluare: Elevii trebuie să menționeze situații practice în care se folosesc coordonate.</p> <p>Cerință îndeplinită în condițiile în care:</p> <ul style="list-style-type: none"> - sunt menționate minimum 2 situații practice în care este necesară cunoașterea unor coordonate (ex: coordonate geografice, coordonate GPS, coordonate în reprezentările din desenul tehnic) și este relevant calculul unor distanțe (de exemplu, stabilirea unor trasee eficiente de aprovizionare, montarea unor elemente tehnice (cabluri, conexiuni, marcaje etc.) cu consum redus de material, poziționarea eficientă a unor elemente de semnalizare etc.)
<p>Demonstrare interactivă și discuție (5 minute)</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Profesorul prezintă definiția reperului cartezian și notațiile specifice. • Elevii trebuie să citească/identifice coordonatele a 6 puncte O, A, B, C, D, E, deja reprezentate în reperul cartezian, respectiv primesc un set de trei puncte pe care trebuie să le poziționeze în reper. Activitatea se poate desfășura fie frontal, la tablă/pe caiete, fie individual, folosind <i>Fișa de lucru</i> (Liveworksheets) https://www.liveworksheets.com/c?a=a&m=d&sr=n&im=n&l=qo&i=sudnzd&r=jh&f=dzdtzouu&ms=uz&cd=dnlitjpxnlgnlqwnngzgjxxg&mw=hs
<p>Evaluare și feedback (5 minute)</p>	<p>Cerință de evaluare: Elevii trebuie să identifice coordonate/să reprezinte puncte cu coordonate date</p> <p>Cerință îndeplinită în condițiile în care:</p> <ul style="list-style-type: none"> - elevii reprezintă corect coordonatele și poziționează corect punctele date <p>Dacă exercițiul se lucrează frontal, la tablă/pe caiete, evaluarea se realizează prin observare directă/evaluare orală, cu intervenții punctuale în caz de erori. Prin completarea <i>Fișei de lucru</i> (Liveworksheets), elevii primesc rezultatul imediat, răspunsurile corecte sunt marcate cu verde, cele greșite cu roșu. Profesorul vede toate fișele elevilor și poate iniția discuții asupra eventualelor erori observate. Fișa de lucru poate fi setată să permită elevilor vizualizarea răspunsurilor corecte după remiterea fișei către profesor.</p>
<p>Lucru în echipă (10 minute)</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Profesorul prezintă elevilor formula de calcul pentru coordonatele mijlocului unui segment și pentru distanța dintre două puncte din reperul cartezian. • Clasa este împărțită în 5 grupe de elevi, numerotate de la 1 la 5. • Profesorul propune elevilor o problemă aplicativă. <p>Pe tabla smart se afișează una din fișele de lucru completate corect, în care sunt menționate coordonatele punctelor O, A, B, C, D, E.</p>  <p>Aplicație practică</p>



	<p>Service-ul auto din punctul O primește piese de schimb de la furnizorii A, B, C, D, E poziționați ca în figură.</p> <p>Pas 1. Folosind formulele date, determinați coordonatele mijloacelor segmentelor OA, OB, OC, OD, OE (fiecare grupă - un segment). Lucrând pe grupe, elevii trebuie să determine coordonatele punctelor M, N, P, R, T (mijloacele segmentelor OA, OB, OC, OD, OE)</p> <p>Pas 2. Calculați distanțele OA, OB, OC, OD, OE (fiecare grupă - o distanță). Lucrând pe grupe, elevii trebuie să determine distanțele OA, OB, OC, OD, OE.</p> <p>Pas 3. Sunt furnizorii C, respectiv E, egal depărtați de service-ul situat în punctul O? Justificați!</p> <p>Pas 4. Două livrări pleacă în același timp de la furnizorii E și B către service-ul auto din punctul O. Care ajunge mai repede? Justificați!</p> <ul style="list-style-type: none">• Pas 5. Furnizorul A trebuie să livreze service-ului un set de piese, dar la jumătatea drumului șoferul a greșit drumul și a mers către furnizorul C. De acolo a fost redirecționat către service-ul din punctul O. Ce distanță a parcurs acest șofer de la furnizorul A, până a ajuns la service?• Profesorul monitorizează activitatea grupelor și oferă sprijin dacă este cazul.• <i>Activitate la nivelul grupelor:</i> fiecare grupă lucrează împreună, notează răspunsul și justificarea pe caiete
Prezentare și discuție (5 minute)	<ul style="list-style-type: none">• Câte un reprezentant al fiecărei grupe notează pe tablă rezultatele obținute. Fiecare echipă prezintă soluțiile găsite și argumentează alegerile lor, cu ajutorul unui elev (raportor desemnat de grup).• Profesorul încurajează dezbateri și discuții între echipe pentru corectarea eventualelor erori de calcul/raționament
Evaluare colegială, feedback (5 minute)	Cerință de evaluare: Cerința se lucrează pe grupe. La expirarea timpului, fiecare grupă explică rezultatul obținut. Se poate propune desfășurarea activității și sub forma unui concurs între echipe.
Sinteză și concluzii (7 minute)	<ul style="list-style-type: none">• Profesorul rezumă principalele concepte introduse în timpul acestei activități.• Elevii sunt încurajați să reflecteze asupra importanței conceptului matematic introdus și să identifice alte situații în care pot aplica cunoștințele dobândite.• Fișa de lucru cu cerințe suplimentare va fi completată acasă, după modelul cerințelor parcurse în timpul orei https://www.liveworksheets.com/c?a=a&m=d&sr=n&im=n&l=st&i=sudnond&r=tm&f=dzdtzouu&ms=uz&cd=dnllpzpxnljlnzvngnzgjxxxg&mw=hs• Elevul cu CES poate primi fișă adaptată ca nivel de dificultate și formule-suport https://www.liveworksheets.com/c?a=a&m=d&sr=n&im=n&l=rv&i=sudnouo&r=pg&f=dzdtzouu&ms=uz&cd=dnllsypxnljxjhbngnzgjxxxg&mw=hs
Autoevaluare și feedback (3 minute)	Elevii completează chestionarul de autoevaluare și feedback https://docs.google.com/forms/d/1dQLA0xx4Z_HxSLjC1pvtWp7G9LKjI9AFv0GoaEorQn4/edit



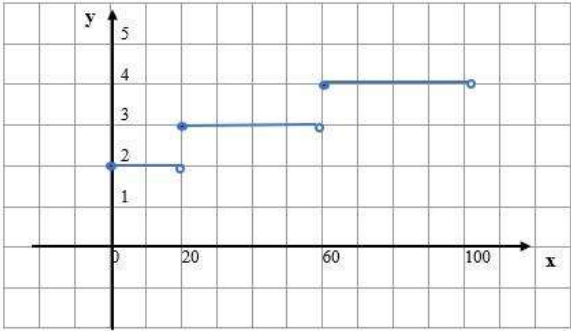
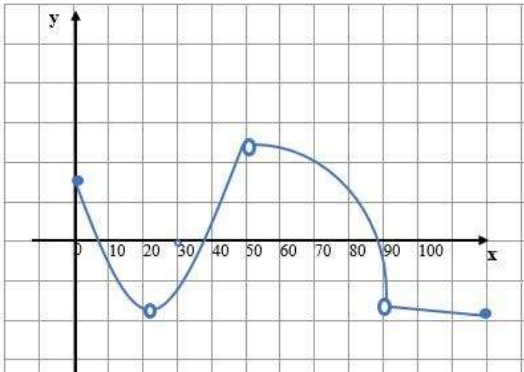
În cadrul acestei secțiuni, propunem următoarele secvențe de activitate pentru clasa a XI-a, învățământ liceal, filiera tehnologică:

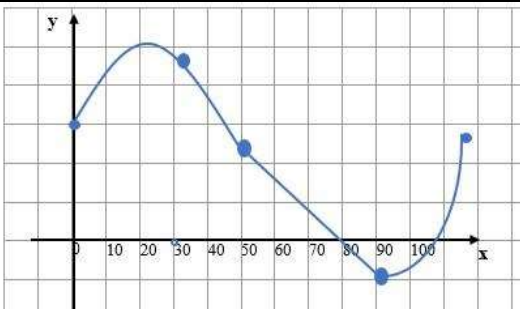
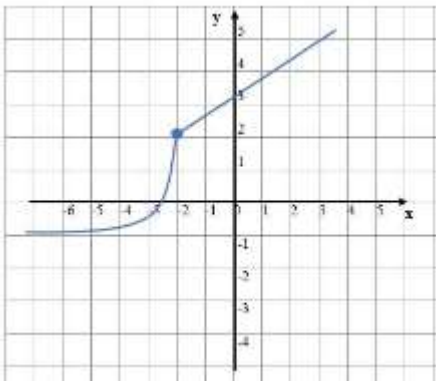
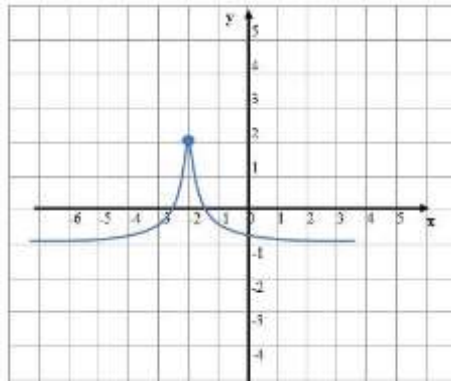
- 1 – CONTINUITATEA UNEI FUNCȚII ÎNTR-UN PUNCT AL DOMENIULUI DE DEFINIȚIE
- 2 – FUNCȚII CONTINUE PE UN INTERVAL DE NUMERE REALE/PE O MULȚIME DE NUMERE REALE (*PROFIL SERVICII*)
- 3 – OPERAȚII CU FUNCȚII CONTINUE
- 4 – PROPRIETĂȚI ALE FUNCȚIILOR CONTINUE PE INTERVALE. PROPRIETATEA LUI DARBOUX
- 5 - CONSECINȚE ALE PROPRIETĂȚII LUI *DARBOUX*. STABILIREA SEMNULUI UNEI FUNCȚII CONTINUE PE UN INTERVAL DE NUMERE REALE (*PROFIL SERVICII*)
- 6 – PROPRIETĂȚI ALE FUNCȚIILOR CONTINUE PE INTERVALE. REZOLVAREA UNOR INECUAȚII

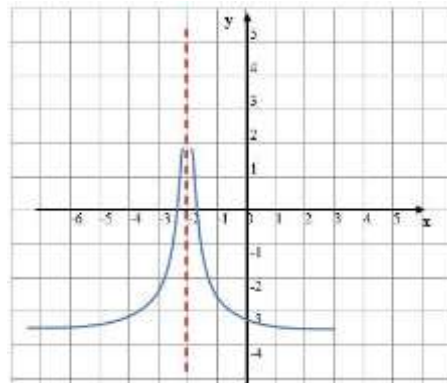
SECVENȚE DE ACTIVITATE

1 - CONTINUITATEA UNEI FUNCȚII ÎNTR-UN PUNCT AL DOMENIULUI DE DEFINIȚIE

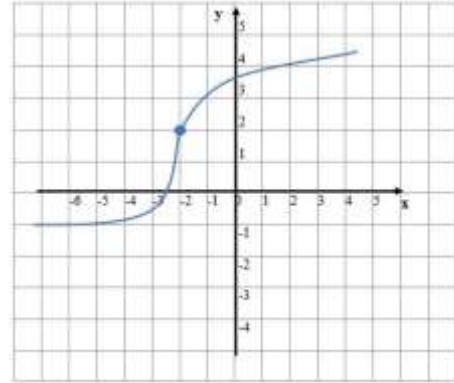
Titlu	Continuitatea unei funcții într-un punct al domeniului de definiție
Tip de activități	Interactive, aplicative
Competențe specifice vizate	CS.1.2. Caracterizarea unor funcții utilizând reprezentarea geometrică a unor cazuri particulare CS.2.2. Interpretarea unor proprietăți ale funcției cu ajutorul reprezentărilor grafice
Resurse implicate	1. Tablă interactivă/ecran videoproiector pentru a prezenta informațiile și a lucra în timp real cu elevii 2. Calculator /telefon mobil pentru accesarea aplicațiilor online, acces la internet
Strategii utilizate	1. Brainstorming: Elevii vor fi încurajați să participe la discuții în grup despre conceptul de limită a unei funcții într-un punct, puncte de acumulare/puncte izolate, continuitate/discontinuitate și să identifice situații practice care implică noțiunea de continuitate. 2. Prezentare interactivă: Profesorul va prezenta interactiv, pe tabla <i>smart</i> sau pe ecran, procedeele de introducere a noțiunii matematice. 3. Lucrul în perechi: Elevii se vor grupa în perechi și vor rezolva cerințe legate de noțiunea de <i>continuitate într-un punct</i> . 4. Rezolvarea de probleme practice: Elevii vor primi contexte de aplicare concrete, în care vor utiliza cunoștințe despre continuitate.
Activități de învățare și evaluare	
Introducere (5 minute)	<ul style="list-style-type: none"> • Elevii primesc link spre aplicația <i>LearningApps</i> unde vizualizează reprezentări grafice ale unor funcții și poartă discuții (în coordonarea profesorului) despre informațiile ce pot fi extrase cu ușurință din lectura grafică. https://learningapps.org/31317270 • Profesorul subliniază faptul că, la definirea limitei funcției într-un punct, nu se pune (și) problema calculului valorii $f(a)$. Dar, dacă se poate calcula și această valoare, atunci se poate pune (și) problema reprezentării grafice ”fără a ridica pixul de pe foaie” în anumite circumstanțe, care urmează a fi detaliate.

<p>Evaluare și feedback (3 minute)</p>	<p>Cerință de evaluare: Prin accesarea link-ului https://learningapps.org/31317270, elevii trebuie să asocieze corect cinci enunțuri cu 5 reprezentări grafice, pornind de la definiția limitei unei funcții într-un punct. Cerință îndeplinită în condițiile în care: - elevii formulează opinii corecte privind condiția de existență a limitei unei funcții într-un punct, stabilesc corect corespondențele; aplicația oferă validare după ce sunt stabilite toate corespondențele</p> <p>Profesorul adresează întrebări suplimentare care conduc la identificarea condițiilor necesare și suficiente pentru ca o funcție să fie continuă într-un punct și, evident, spre înțelegerea noțiunii de continuitate.</p>
<p>Demonstrare interactivă și discuție (8 minute)</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Profesorul prezintă interactiv, pe tablă sau pe ecran, modul în care se definește continuitatea unei funcții într-un punct al domeniului de definiție. • Profesorul propune următoarea cerință: <p><i>Asociați fiecărui exemplu reprezentarea grafică adecvată.</i></p> <ol style="list-style-type: none"> traseul unei căi ferate între localitatea de plecare și cea de destinație costul timbrilor poștale pentru diverse distanțe dintre localitatea expeditorului și cea a destinatarului traseul proiectat al unei autostrăzi, în care nodurile rutiere nu au fost încă finalizate <div style="text-align: center;">  <p>Fig. 1</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>Fig. 2</p> </div>

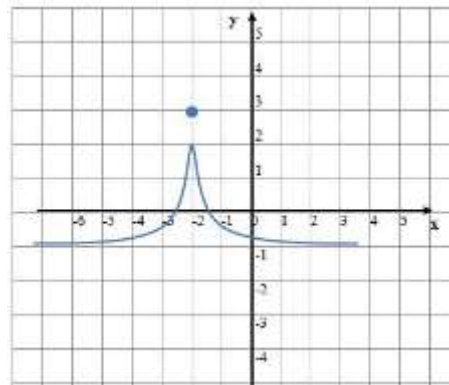
	 <p style="text-align: right;">Fig. 3</p>
<p>Evaluare și feedback (4 minute)</p>	<p>Care dintre situațiile de mai sus se poate asocia cu noțiunea de funcție continuă (în fiecare punct al domeniului de definiție)?</p> <p>Cerință de evaluare: Elevii trebuie să asocieze corect a) - fig. 3, b) - fig.1, c) - fig. 2 și să identifice punctele continuitate/ discontinuitate ale funcțiilor.</p> <p>Cerință îndeplinită în condițiile în care: - elevii identifică corect cele 3 situații prezentate prin text și prin reprezentare grafică și dau minim 2-3 exemple de puncte de continuitate/discontinuitate. Pentru elevii care au avut răspunsuri greșite, profesorul recomandă revederea definiției/mai multă atenție la lectura graficului, precum și discuții colegiale care să clarifice anumite aspecte care au reprezentat bariere în formularea/alegerea răspunsului corect.</p>
<p>Lucru în perechi (10 minute)</p>	<ul style="list-style-type: none"> Elevii vor lucra în perechi cerințele de pe <i>Fișa de lucru</i>, notând rezolvările și explicațiile pe caiete <p>Fișă de lucru Item 1: Identificați în reprezentările de mai jos graficele unor funcții continue în punctul $x_0 = -2$.</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div data-bbox="443 1288 880 1668">  <p style="text-align: center;">a)</p> </div> <div data-bbox="928 1288 1380 1668">  <p style="text-align: center;">b)</p> </div> </div>



c)



d)



e)

Item 2:

Continuitatea unei funcții se poate studia (are sens) doar în punctele în care funcția este definită. Pentru funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2}$, **nu** putem studia (nu are sens) continuitatea în ... (selectați un singur răspuns corect):

- a) $x = \pm 3$
- b) $x = 3$
- c) $x = 0$
- d) $x \in \{-3, 0, 3\}$

Item 3:

Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 3x+1, & x \leq -2 \\ 1-2x, & x > -2 \end{cases}$. Care dintre afirmațiile de

mai jos este adevărată? Justificați!

- a) $l_s(-2) = f(-2) \neq l_a(-2)$
- b) $l_s(-2) \neq f(-2) = l_a(-2)$
- c) f este continuă în $x_0 = -2$
- d) f nu este definită în $x_0 = -2$



	<p>Item 4: Determinați valoarea parametrului real a pentru care funcția</p> $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 9 - 5x, & x \leq 3 \\ \frac{2x+1}{x} + a, & x > 3 \end{cases}$ <p>este continuă în $x = 3$.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Profesorul monitorizează activitatea elevilor și oferă sprijin sau încurajează colaborarea între elevi, dacă este cazul.
<p>Prezentare și discuție (8 minute)</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Profesorul solicită aleatoriu, câte unei perechi, să-și prezinte/justifice răspunsul, ținând cont de dificultatea fiecărui item • Profesorul încurajează dezbateri și discuții între echipe pentru corectarea eventualelor erori de calcul/raționament • Elevii compară rezultatele prezentate cu rezultatele din caiete și participă activ, adresând întrebări pentru clarificarea noțiunilor prezentate
<p>Evaluare colegială, feedback (3 minute)</p>	<p>Cerință de evaluare: Evaluarea se realizează prin observarea activității elevilor pe parcursul rezolvării, validarea/invalidarea argumentelor prezentate de fiecare pereche și compararea răspunsurilor.</p> <p>Se poate propune desfășurarea activității și sub forma unui concurs, folosind link-ul <i>Kahoot</i>: https://create.kahoot.it/share/continuitatea-unei-functii-intr-un-punct/c0a8876f-ae33-4e33-838f-c52490dc6d75</p> <p>Este recomandat ca profesorul să aloce timp după fiecare întrebare pentru a discuta răspunsurile bifate de elevi și a puncta noțiunile teoretice implicate.</p>
<p>Sinteză și concluzii (5 minute)</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Profesorul rezumă principalele concepte introduse în timpul acestei activități • Elevii sunt încurajați să reflecteze asupra importanței conceptului matematic introdus și să identifice situații practice în care pot aplica cunoștințele dobândite • Pentru fixarea cunoștințelor, elevii vor lucra, ca activitate independentă/temă pentru acasă, exerciții asemănătoare, cuprinse în <i>Fișa de lucru</i> https://docs.google.com/document/d/1Zn9DDRubvEDnyWtFindb9g3g5iZzZjUF/edit?usp=sharing&oid=116235765043386647469&rtpof=true&sd=true
<p>Autoevaluare și feedback (4 minute)</p>	<p>Elevii completează chestionarul de autoevaluare și feedback https://forms.office.com/Pages/ShareFormPage.aspx?id=XxUKiJJnM02bkycF-5Wzys3Qnx3wCt5GuHgjp4BGEulUQVZNWDhRVzIwVUFVWktYMEs2Mzg5Nlk5Ry4u&sharetoken=dHDLWPiIfeNv4fgpIvSj Prin analiza răspunsurilor, profesorul va identifica acele aspecte care necesită remediere/aprofundare, generând direcții de intervenție diferențiată.</p>

**SECVENȚE DE ACTIVITATE**
2 – FUNCȚII CONTINUE PE UN INTERVAL DE NUMERE REALE/PE O MULȚIME DE NUMERE REALE (PROFIL SERVICII)

Titlu	Funcții continue pe un interval de numere reale/pe o mulțime de numere reale. Exemple și aplicații practice
Tip de activități	Interactive, aplicative
Competențe specifice vizate	CS.2.2. Interpretarea unor proprietăți ale funcției cu ajutorul reprezentărilor grafice CS.4.2. Exprimarea cu ajutorul noțiunilor de limită, continuitate, derivabilitate, monotonie, a unor proprietăți cantitative și calitative ale unei funcții
Resurse implicate	<ol style="list-style-type: none"> Videoproiector, laptop/tabla interactivă pentru a prezenta informațiile și a lucra în timp real cu elevii Soft util pentru trasarea graficelor de funcții și lecturi grafice https://www.geogebra.org/calculator
Strategii utilizate	<ol style="list-style-type: none"> Brainstorming: Elevii vor fi încurajați să participe la discuții în grup despre conceptul de continuitate într-un punct/pe o mulțime și probleme practice din domeniul economic. Demonstrare interactivă: Profesorul explică interactiv pe tablă sau pe ecran, extinderea firească de la noțiunea de continuitate într-un punct la cea de continuitate pe o mulțime. Activitate frontală și individuală: Elevii vor rezolva exerciții propuse de profesor și vor rezolva mini-teste de pe <i>asq.ro</i>. Rezolvare de probleme practice: Elevii vor primi exemple concrete de situații din domeniul economic, unde vor trebui să aplice cunoștințele despre continuitate și algoritmi de calcul al limitelor în situațiile întâlnite.
Activități de învățare și evaluare	
Verificarea noțiunilor anterioare, necesare lecției noi (10 minute)	<ul style="list-style-type: none"> Se discută despre noțiunea de continuitate a unei funcții într-un punct, se rezolvă exerciții din temă la care elevii au întâmpinat dificultăți <p>Se verifică rapid însușirea noțiunii de funcție continuă într-un punct cu <i>Kahoot</i> https://create.kahoot.it/details/f354a51c-74a9-4f78-b889-6ea36e896853</p>
Introducerea noțiunilor noi Activitate interactivă – elevii sunt antrenați în descoperirea noțiunilor noi și rezolvarea itemilor suport (15 minute)	<ul style="list-style-type: none"> Profesorul prezintă definiția noțiunii de continuitate pe interval/mulțime și importanța sa în domeniul economic și nu numai. Se subliniază (pe baza exemplelor de grafice) faptul că funcțiile elementare sunt continue în toate punctele din domeniul lor de definiție și se conduce discuția spre noțiunea de continuitate pe mulțime/interval. Se extinde discuția continuității spre funcții definite pe ramuri. Elevii primesc un exercițiu simplu cu o funcție definită pe ramuri și se propune verificarea continuității acesteia funcții pe un interval. Se discută care sunt etapele de demonstrare a continuității unei funcții pe o mulțime – activitate frontală (elevii vor lucra la tablă în diverse etape ale rezolvării) <p>Exercițiu suport</p> <p>Să se studieze continuitatea funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2x-1, x < 0 \\ x^2 + x - 1, x \geq 0 \end{cases}$.</p>



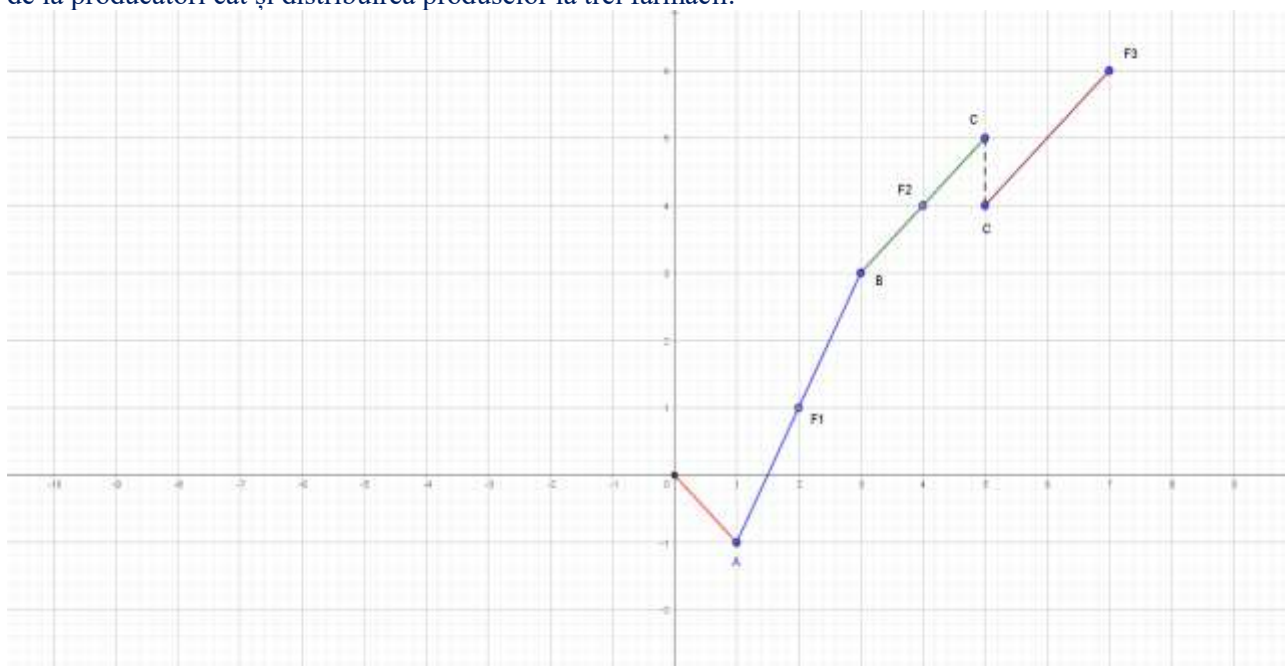
	<p>Învățare dirijată, prin etapizare:</p> <ul style="list-style-type: none"> - se identifică domeniul de continuitate asociat exemplului dat; - pornind de la exerciții practice de funcții care admit discontinuități, se analizează împreună cu elevii rezultatele și, pe baza diferențierilor, se clasifică și se definesc discontinuitățile în cele de speța I, respectiv speța a II-a. <p>Exerciții suport</p> <p>Să se studieze continuitatea funcțiilor</p> $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \leq 0 \\ x^2-3, & x > 0 \end{cases}, g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$
Evaluare feedback (10 minute)	<p>Cerință de evaluare: itemi prin care elevul se (auto)evaluează</p> <p>Elevii sunt invitați să rezolve cerințele din activitatea <i>Desmos</i> https://teacher.desmos.com/activitybuilder/custom/64e5c947c16c525b96f34a34.</p>
Prezentare interactivă și discuție (10 minute)	<p>Profesorul prezintă un exemplu de modelare a unei situații economice și se interpretează continuitatea funcției în contextul respectiv.</p> <p>Bursa din București funcționează între orele 10.00 și 16.00. Urmărind volumul de tranzacționare al acțiunilor unei companii listate la bursă, se observă că acesta a evoluat conform distribuției funcționale:</p> $AT : [10;16] \rightarrow \mathbb{R}, AT(x) = \begin{cases} 2^{\frac{x}{4}} \cdot 1000, & x \in [10;12) \\ 10(x+18)^2 - 1000, & x \in [12;14), \\ 660x + 200, & x \in [14;16] \end{cases}$ <p>$AT(x)$ reprezentând numărul de acțiuni tranzacționate la momentul x.</p> <ol style="list-style-type: none"> Să se verifice dacă numărul de acțiuni tranzacționate a avut o <i>variație continuă</i> în intervalul $[10 ; 13]$. Să se verifice dacă numărul de acțiuni tranzacționate a avut o <i>variație continuă</i> în intervalul $[13 ; 16]$. Să se precizeze momentul în care nivelul de tranzacționare a avut „salt” și stabiliți dacă acesta a reprezentat o creștere sau o cădere a tranzacționării. <p>Elevii participă activ, formulând întrebări și idei/opinii.</p>
Evaluare colegială, feedback	<p>Se apreciază verbal răspunsurile elevilor care au lucrat la tablă, atât de colegi, cât și în coordonarea profesorului.</p>
Sinteză și concluzii (5 minute)	<ul style="list-style-type: none"> • Profesorul rezumă principalele concepte și metode de lucru abordate în activitate. • Elevii sunt încurajați să reflecteze asupra importanței noțiunii învățate și să identifice alte situații în care pot aplica cunoștințele dobândite. • Se indică elevilor resurse gratuite, unde pot găsi și alte exemple de exerciții și pot relua noțiunile teoretice în ritm propriu.
Autoevaluare și feedback	<p>Elevii completează chestionarul de autoevaluare și feedback https://forms.gle/SA5ggCjc5NVW4KLUA (formular Google pentru elevi) sau https://drive.google.com/file/d/1DCOkfE7Q2ow_o3y9L9KuQgmoTe-v9F8G/view?usp=sharing (document pdf) sau https://docs.google.com/forms/d/16IA9xIh-7YDMJpOjCB2DDthMINYO5c7jeZY091J3X9o/edit (formular Google care poate fi copiat și modificat).</p>

Fișă de lucru – aplicație practică (extindere)	https://docs.google.com/document/d/1w58un14rAcGdFhf9fIOTFZQUKxxaofx_/edit?usp=drive_link
--	---

Fișă de lucru – Aplicație practică
Conținut: Funcții continue pe un interval de numere reale

CS. 4.2. Exprimarea cu ajutorul noțiunilor de limită, **continuitate**, derivabilitate, monotonie, a unor proprietăți cantitative și calitative ale unei funcții

O firmă care se ocupă cu distribuirea produselor farmaceutice deține un autovehicul cu care face aprovizionarea de la producători cât și distribuirea produselor la trei farmacii.



Sediul firmei se află în originea sistemului de axe, farmaciile își au sediile în punctele F_1, F_2, F_3 , iar în punctele A - de abscisă $x=1$, B - de abscisă $x=3$ și C - de abscisă $x=5$ sunt poduri. Deplasarea se face după graficul

$$\text{funcției } f: [0;7] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} -x, x \in [0;1) \\ 2x-3, x \in [1;3] \\ x, x \in (3;5] \\ x-1, x \in (5;7] \end{cases}. \text{ Poate ajunge autovehiculul la toate farmaciile?}$$

Răspuns:

Pentru a ajunge la cele trei farmacii autovehiculul trebuie să treacă cele trei poduri, adică se pune problema continuității funcției f în punctele A - de abscisă $x=1$, B - de abscisă $x=3$ și C - de abscisă $x=5$.

$$l_s(1) = \lim_{x \rightarrow 1} (-x) = -1$$

$$l_d(1) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} (2x-3) = -1 \Rightarrow l_s(1) = l_d(1) = f(1), \text{ deci funcția } f \text{ este continuă în punctul } A \text{ de abscisă } x=1$$

$$f(1) = 2 \cdot 1 - 3 = -1$$



$$l_s(3) = \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x(3)}} (2x - 3) = 3$$

$$l_d(3) = \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x \setminus 3}} x = 3 \quad \Rightarrow l_s(3) = l_d(3) = f(3), \text{ deci funcția } f \text{ este continuă în punctul B de abscisă } x = 3.$$

$$f(3) = 2 \cdot 3 - 3 = 3$$

$$l_s(5) = \lim_{\substack{x \rightarrow 5 \\ x(5)}} x = 5$$

$$l_d(5) = \lim_{\substack{x \rightarrow 5 \\ x \setminus 5}} (x - 1) = 4 \Rightarrow l_s(5) = f(5) \neq l_d(5), \text{ deci funcția } f \text{ nu este continuă în punctul C de abscisă } x =$$

$$f(5) = 5$$

În concluzie autovehiculul nu poate ajunge la toate farmaciile.



SECVENȚE DE ACTIVITATE
3 – OPERAȚII CU FUNCȚII CONTINUE

Titlu	Continuitatea sumei, produsului, raportului și a compunerii unor funcții continue
Tip de activități	Interactive, aplicative
Competențe specifice vizate	CS.1.2. Caracterizarea unor funcții utilizând reprezentarea geometrică a unor cazuri particulare CS.4.2. Exprimarea cu ajutorul noțiunilor de limită, continuitate, derivabilitate, monotonie, a unor proprietăți cantitative și calitative ale unei funcții
Resurse implicate	<ol style="list-style-type: none"> 1. Tablă interactivă/ecran pentru a prezenta informațiile și a lucra în timp real cu elevii. 2. Calculator cu software/aplicații de generare a graficelor de funcții și pentru efectuarea operațiilor cu funcții continue pe un interval.
Strategii utilizate	<ol style="list-style-type: none"> 1. Brainstorming: Elevii vor fi încurajați să participe la discuții în grup despre conceptul de funcție, respectiv funcție continuă, și să identifice probleme practice în care putem folosi acest concept. 2. Demonstrare interactivă: Profesorul va prezenta interactiv, pe tabla inteligentă sau pe ecran, procedeele de determinare a continuității pentru suma, produsul, raportul și respectiv compunerea de funcții elementare. 3. Lucru în echipe: Elevii vor fi împărțiți în echipe și vor rezolva colaborativ cerințe care implică continuitatea funcțiilor/a operațiilor cu funcții continue. 4. Rezolvare de probleme practice: Elevii vor primi spre studiu o problemă practică, apoi vor fi invitați să identifice un alt exemplu concret în care vor aplica cunoștințele despre continuitate și algoritmi de optimizare pentru a găsi soluții eficiente.
Activități de învățare și evaluare	
Introducere (10 minute)	<ul style="list-style-type: none"> • Profesorul verifică rapid cunoștințele elevilor, legate de continuitatea funcțiilor. • Elevii primesc spre lectură/analizare reprezentări grafice ale unor funcții și poartă discuții (sub coordonarea profesorului) despre informațiile ce pot fi extrase cu ușurință din lectura grafică. <p>https://teacher.desmos.com/activitybuilder/custom/64d49399d64ec8bb9be94a10</p>
Evaluare și feedback (5 minute)	<p>Cerință de evaluare:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Elevii trebuie să enunțe conceptul de funcție continuă, algoritmul de determinare a continuității unei funcții, să identifice prin lectură grafică noțiunile învățate anterior. <p>https://www.menti.com/al8cm9y72vs4, (cod 1398 9030)</p> <p>Cerință îndeplinită în condițiile în care:</p> <ul style="list-style-type: none"> - elevii reușesc să răspundă corect la minim 5 din cele 7 cerințe; - elevii își notează în caiet noțiunile pe care nu le stăpânesc suficient și au nevoie de aprofundare; sunt îndrumați să caute pe surse online informații care fac trimitere la conceptul de funcție continuă pe un interval.
Prezentare interactivă și discuție (20 minute)	<p>Profesorul prezintă pe tablă sau pe ecran, contextul noii activități; explică condițiile în care se păstrează proprietatea de continuitate pentru suma, produsul, raportul și, respectiv, compunerea de funcții pe un interval. În următorul moment de activitate, elevii primesc următoarele sarcini de lucru:</p> <p>Aplicația 1. Considerăm funcțiile:</p>

$$f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} -3, & x > 0 \\ 3, & x \leq 0 \end{cases}, g(x) = \begin{cases} 3, & x > 0 \\ -3, & x \leq 0 \end{cases}$$

Precizați valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

$p_1)$ $f + g$ **nu** este continuă la stânga în $x_0 = 0$, dar este continuă la dreapta în $x_0 = 0$.

$p_2)$ $f - g$ este continuă la stânga în $x_0 = 0$, dar **nu** este continuă la dreapta în $x_0 = 0$.

$p_3)$ $f \cdot g$ nu este continuă în $x_0 = 0$.

$p_4)$ $\frac{f}{g}$ este continuă în $x_0 = 0$.

Justificați răspunsurile.

- Determinarea funcțiilor sumă, diferență, produs și raport se realizează rapid de către elevi, sub îndrumarea profesorului; se dirijează învățarea prin discutarea continuității pentru fiecare funcție obținută; profesorul prezintă pe ecran graficele funcțiilor sumă, diferență, produs, raport pentru verificarea corectitudinii și prin lectura grafică ulterioară (lucru care poate fi realizat și de către elevi cu ajutorul aplicației instalate pe telefon).

<https://teacher.desmos.com/activitybuilder/custom/64d92b4f3c664c6e80562655>

- Elevii notează în caiete și participă activ, adresând întrebări pentru înțelegerea noțiunilor prezentate (A – p_2 , p_4 și F – p_1 , p_3).

Aplicația 2. (aplicație practică)

Un rezervor este umplut la o sursă cu debit variabil, între orele 6.00 și 10.00. Același rezervor este golit, prin scurgere, a doua zi, în același interval de timp. Demonstrați că există o aceeași oră t în ambele zile în care apa este la același nivel în bazin.

Răspuns:

Fie V volumul rezervorului și asociem funcțiile $f, g : [6; 10] \rightarrow [0; V]$ definite astfel: $f(t)$ este volumul de apă la momentul t în timpul umplerii, iar $g(t)$ este volumul de apă la momentul t în timpul scurgerii. Cum cele două funcții f și g sunt continue, deducem că și diferența lor este continuă și există un punct în care diferența funcțiilor este nulă ($Im(f - g) = [-V; V]$).

Aplicația 3. Se consideră funcțiile:

$$f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} -2, & x \leq 1 \\ x^2 + x, & x > 1 \end{cases}, g(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ -3, & x > 1 \end{cases}$$

Studiați continuitatea funcțiilor $f, g, f + g, f \cdot g$. Ce observați?

(Răspuns corect: Funcțiile f și g sunt discontinue în $x_0 = 1$. Suma celor două funcții este continuă în punctul $x_0 = 1$, însă produsul, nu; produsul este o funcție continuă doar la stânga în punctul $x_0 = 1$.)

- La momentul finalizării timpului de lucru alocat acestei sarcini, elevii prezintă soluțiile găsite și argumentează alegerile făcute. În completare, se prezintă pe ecran graficele funcțiilor sumă și produs

<https://teacher.desmos.com/activitybuilder/custom/64d94cd7d75e6722aa50e901>



	<ul style="list-style-type: none">Elevii notează în caiete și participă activ, adresând întrebări pentru înțelegerea noțiunilor prezentate.
Evaluare și feedback (5 minute)	<p>Cerință de evaluare:</p> <ul style="list-style-type: none">Profesorul verifică rezultatele învățării, prin intermediul unui chestionar online, iar la final adresează aprecieri verbale/asigură feedback pentru întreaga activitate. <p>https://create.kahoot.it/details/27b47868-1e06-461e-8a7e-97d988c1ea31</p> <p>Cerință îndeplinită în condițiile în care:</p> <ul style="list-style-type: none">- elevii reușesc să răspundă corect la minimum 3 din cele 5 cerințe;- elevii își notează în caiet noțiunile pe care nu le stăpânesc suficient și au nevoie de consolidare.
Sinteză și concluzii (5 minute)	<ul style="list-style-type: none">Profesorul rezumă principalele concepte abordate în timpul acestor activități.Itemii propuși permit verificarea continuității sumei, produsului, raportului și compunerii funcțiilor, precum și utilizarea operațiilor cu funcții continue pentru rezolvarea unor probleme practice.Elevii sunt încurajați să reflecteze asupra importanței operațiilor cu funcții continue și să identifice situații în care pot aplica cunoștințele dobândite. Vor discuta, de asemenea, cum pot utiliza aceste concepte și abilități în situații reale de aplicare din domeniul economic, tehnic sau dintr-un alt domeniu de activitate.
Autoevaluare și feedback (5 minute)	<p>Elevii completează chestionarul de autoevaluare și feedback în aplicația <i>Mentimeter</i>:</p> <p>https://www.mentimeter.com/app/presentation/al1ji16fdmqmcuihntfvktshx7wouur8/zcpiy98fi4p</p>



SECVENȚE DE ACTIVITATE
4 – PROPRIETĂȚI ALE FUNCȚIILOR CONTINUE PE INTERVALE. PROPRIETATEA LUI DARBOUX

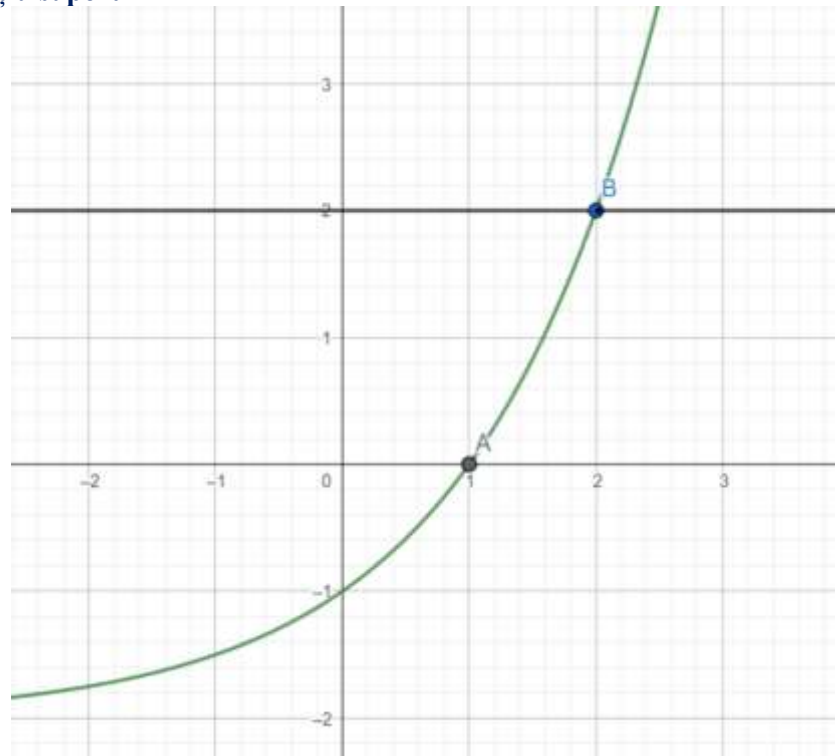
Titlu	Proprietăți ale funcțiilor continue pe intervale. Proprietatea lui Darboux
Tip de activități	Interactive, aplicative
Competențe specifice vizate	CS.4.2. Exprimarea cu ajutorul noțiunilor de limită, continuitate, derivabilitate, monotonie, a unor proprietăți cantitative și calitative ale unei funcții
Resurse implicate	1. Tablă interactivă/ecran pentru a prezenta informațiile și a lucra în timp real cu elevii 2. Calculator cu software/aplicații de generare a graficelor de funcții
Strategii utilizate	1. Brainstorming: Elevii vor fi încurajați să participe la discuții în grup despre conceptul legat de <i>proprietatea lui Darboux</i> și problemele practice din domeniul continuității, interpretarea grafică și proprietăți ce se pot obține din interpretarea grafică. 2. Prezentare interactivă: Profesorul va prezenta interactiv pe tablă sau pe ecran proprietatea lui <i>Darboux</i> (pornind de la reprezentarea grafică). 3. Lucru în echipe: Elevii vor fi împărțiți în echipe mici și vor rezolva probleme aplicând proprietăți ale funcțiilor continue, proprietatea lui <i>Darboux</i> .
Activități de învățare și evaluare	
Introducere (5 minute)	<ul style="list-style-type: none"> Profesorul prezintă contextul activității, explică importanța proprietăților funcțiilor continue pornind de la reprezentări grafice. Elevii primesc o reprezentare grafică a unei funcții simple și discută despre informațiile ce pot fi extrase cu privire la existența punctelor de intersecție ale reprezentării grafice cu drepte orizontale.
Evaluare și feedback (5 minute)	<p>Cerință de evaluare: Elevii trebuie să identifice puncte de intersecție ale reprezentării grafice cu o dreaptă orizontală și să emită ipoteze cu privire la condițiile necesare pentru existența acestor puncte, să observe corelații cu noțiunea de continuitate pe un interval, cu imaginea funcției.</p> <p>Cerință îndeplinită în condițiile în care: - elevii identifică/ marchează punctul/ punctele de intersecție ale graficului cu o dreaptă orizontală - elevii observă că pentru o funcție continuă pe un interval există drepte orizontale care intersecționează reprezentarea grafică - elevii notează în caiet observațiile făcute.</p>
Prezentare interactivă și discuție (15 minute)	<p>Profesorul inițiază dezbateri pe baza exemplurilor prezentate și propune elevilor spre rezolvare următoarea aplicație:</p> <p>Aplicația 1: Se consideră funcția $f : [0,5] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 6x + 5$.</p> <p>a) Rezolvați ecuația $f(x) = a$ pentru $a \in \{-2, 2\}$. Ce observați? Justificați răspunsul.</p> <p>b) Arătați că, eventual utilizând reprezentarea grafică a funcției, imaginea funcției este $[-4;5]$.</p> <p>c) Arătați că ecuația $f(x) = a$ are o soluție în intervalul $[0;5]$ pentru orice număr real $a \in [-4;5]$.</p> <p>Profesorul prezintă interactiv, pe tablă sau pe ecran, proprietatea lui <i>Darboux</i> și interpretarea grafică (utilizând exemplele și aplicația prezentate și discutate).</p>

	Elevii primesc link-ul https://www.geogebra.org/m/tne59tzk , discută despre informațiile ce pot fi extrase prin mutarea cursorului și observă că funcția are proprietatea lui <i>Darboux</i> .
Evaluare feedback (15 min)	și <ul style="list-style-type: none"> Elevii vor fi împărțiți în echipe și vor rezolva următoarele aplicații: <p>Aplicația 2:</p> <p>Se consideră funcția $f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2 - x, & x \in [-2, 0] \\ x, & x \in (0, 2] \end{cases}$.</p> <p>a) Rezolvați ecuația $f(x) = a$ pentru $a \in \{0, 2\}$. Ce observați? Justificați răspunsul.</p> <p>b) Arătați că ecuația $f(x) = 1$ nu are soluții în intervalul $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.</p> <p>c) Folosind eventual reprezentarea grafică a funcției, arătați că imaginea funcției este $(0; 4]$.</p> <p>d) Funcția are proprietatea lui <i>Darboux</i>? Justificați răspunsul.</p> <p>Elevii primesc link-ul https://www.geogebra.org/m/kxwxecpm, ca suport în rezolvarea aplicației.</p> <p>Aplicația 3:</p> <p>Se consideră funcția $f : \left[-\frac{9}{4}, \frac{9}{4}\right] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 3x + 1$. Folosind eventual și reprezentarea grafică arătați că funcția are proprietatea lui <i>Darboux</i>.</p> <p>Elevii primesc link-ul https://www.geogebra.org/m/j6wqdhuj, prin care se pot raporta la reprezentarea grafică.</p> <p>Cerință de evaluare:</p> <p>Elevii trebuie să rezolve exercițiul cel puțin parțial, utilizând reprezentarea grafică și argumentând răspunsul.</p>
Sinteză concluzii (5 minute)	și <ul style="list-style-type: none"> Profesorul rezumă principalele concepte și metode abordate în activitate. Elevii sunt încurajați să reflecteze asupra importanței proprietăților funcțiilor continue, a proprietății lui <i>Darboux</i> și să identifice alte situații în care pot aplica cunoștințele dobândite Temă: https://drive.google.com/file/d/1sBI9Akccs9ccnIKBoIPwVzMCnNjCNcRd/view?usp=sharing
Autoevaluare și feedback (5 minute)	Elevii vor scrie un jurnal în care vor reflecta asupra modului în care au abordat aplicațiile, cum au colaborat cu colegii de echipă și ce au învățat despre proprietatea lui <i>Darboux</i> .



SECVENȚE DE ACTIVITATE
5 - CONSECINȚE ALE PROPRIETĂȚII LUI DARBOUX. STABILIREA SEMNULUI UNEI
FUNȚII CONTINUE PE UN INTERVAL DE NUMERE REALE (PROFIL SERVICII)

Titlu	Consecințe ale proprietății lui Darboux. Stabilirea semnului unei funcții continue pe un interval de numere reale
Tip de activități	Interactive, aplicative
Competențe specifice vizate	CS.2.2. Interpretarea unor proprietăți ale funcției cu ajutorul reprezentărilor grafice CS.4.2. Exprimarea cu ajutorul noțiunilor de limită, continuitate, derivabilitate, monotonie, a unor proprietăți cantitative și calitative ale unei funcții
Resurse implicate	<ol style="list-style-type: none"> 1. Videoproiector, laptop pentru a prezenta informațiile și a lucra în timp real cu elevii sau tablă interactivă 2. Soft util pentru trasarea graficelor de funcții și lecturi grafice https://www.geogebra.org/calculator
Strategii utilizate	<ol style="list-style-type: none"> 1. Brainstorming: Elevii vor fi încurajați să participe la discuții privind interpretarea grafică a proprietății lui Darboux . 2. Prezentare interactivă dirijată: Plecând de la un grafic al unei funcții continue și corelând cu interpretări grafice ale unor funcții studiate în clasele IX-X, profesorul conduce discuția cu elevii spre identificarea semnului funcțiilor și, implicit, spre identificarea/stabilirea intervalelor unde funcțiile respective ar putea atinge valoarea 0 (se ajunge astfel la stabilirea existenței sau nu a soluțiilor unor ecuații). 3. Activitate frontală și individuală: Elevii vor rezolva individual exerciții propuse de profesor, pe care le vor prezenta apoi colegilor; se vor discuta metode alternative de rezolvare. 4. Rezolvare de probleme practice: Elevii vor primi exemple concrete de situații din domeniul economic, unde vor trebui să aplice cunoștințele semnului funcțiilor și soluțiile unor ecuații.
Activități de învățare și evaluare	
Verificarea noțiunilor anterioare necesare lecției noi (10 min)	<ul style="list-style-type: none"> • Se discută despre proprietatea lui Darboux a unei funcții continue pe un interval, se rezolvă problemele care au fost propuse la temă pentru a repeta noțiuni din clasa a X-a și pentru a pregăti noua învățare https://drive.google.com/file/d/1sBI9Akccs9ccnKBoIPwVzMCnNjCnCRd/view?usp=sharing Se verifică rapid însușirea detaliilor proprietății lui Darboux, cu aplicația Kahoot https://create.kahoot.it/details/7494a9c4-2a46-4c67-867f-f25b1bc68ffb
Introducere a noțiunilor noi Activitate interactivă – elevii sunt antrenați în descoperirea noțiunilor noi și rezolvarea itemilor suport (15 minute)	<ul style="list-style-type: none"> • Profesorul propune studierea graficului unei funcții continue, se identifică semnul acesteia pe grafic și se observă care ar fi punctele în care funcția se intersectează cu axa Ox . Se face legătura cu soluțiile ecuației $f(x) = 0$. • Se discută cu elevii ce ar însemna să rezolvăm ecuația $f(x) = c, c \in \mathbb{R}^*$. Elevii primesc exerciții de stabilire a semnului pentru funcții care conțin produse și rapoarte de funcții continue (elevii vor lucra la tablă în diversele etape ale rezolvării exercițiilor – etapele construirii tabelelor de semn).

Exercițiu suport 1


Analizând graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2^x - 2$, construit cu ajutorul aplicației *Geogebra*, să se stabilească:

- semnul funcției pe intervalul $(-2; 0)$, respectiv, $(2; 3)$;
- coordonatele punctului A, de intersecție a graficului cu axa Ox ;
- coordonatele punctului B, de intersecție a graficului funcției cu dreapta de ecuație $y = 2$.

Se extinde intervalul pe care funcția este negativă respectiv pozitivă (se stabilesc intervalele de semn) apoi se deduce că $x = 1$ este soluția ecuației $f(x) = 0$ și că $x = 2$ este soluția ecuației $f(x) = 2$.

Se descoperă împreună cu elevii etapele algebrice de stabilire a semnului unei funcții și modul de completare a unui tabel de semn.

Exercițiu suport 2

Să se stabilească semnul funcțiilor:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3^x - 1;$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \sqrt[3]{2x + 2};$$

$$f \cdot g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\frac{f}{g}: D \rightarrow \mathbb{R}.$$

Precizați mulțimea D , D fiind domeniul maxim de definiție al funcției cât (raport).

Sugestii metodologice: profesorul sugerează elevilor să își reamintească cum se realizau tabelele de semn cu mai multe linii în clasa a IX-a și cum se rezolvau ecuații exponențiale, logaritmice, iraționale în clasa a X-a.



Evaluare și feedback (10min)	Elevii sunt invitați la tablă să prezinte etapele de rezolvare ale exercițiului și se discută corectitudinea rezultatelor prin evaluare colegială, feedback individual și, eventual notare.
Prezentare interactivă și discuție (10 minute)	<ul style="list-style-type: none"> • Profesorul prezintă un exemplu de modelare a unei situații economice și se interpretează semnificația semnului funcției în modelul respectiv <p>ITEM APLICATIV Stocurile unui depozit sunt exprimate cu ajutorul funcției $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(t) = \sqrt[3]{16 - 2^{t+1}}$, unde $f(t)$ reprezintă cantitatea de materiale (în tone) aflată în depozit la momentul t și se consideră că se poate livra marfă atâta vreme cât stocurile sunt pozitive.</p> <p>a) Ce cantitate de marfă s-a aflat în depozit la momentul începerii livrărilor $t_0 = 0$? b) În câte ore se va termina marfa din depozit?</p> <p>Indicație – se va studia semnul funcției f pentru a stabili intervalul pe care aceasta este pozitivă.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Elevii participă activ, aducând întrebări și propunând idei.
Evaluare verbală	Se apreciază verbal răspunsurile elevilor care au fost activi la oră
Sinteză și concluzii (5 minute)	<ul style="list-style-type: none"> • Profesorul rezumă principalele concepte și metode de lucru abordate în activitate. • Elevii sunt încurajați să reflecteze asupra importanței noțiunii învățate și să identifice alte situații în care pot aplica cunoștințele dobândite.
Autoevaluare și feedback	<p><i>Biletul de ieșire</i> - elevii vor răspunde în scris la următoarele:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. O idee pe care am înțeles-o foarte bine în cadrul lecției de azi: ... 2. O întrebare (la care încă nu știu răspunde) în raport cu activitățile de învățare noi: ... 3. Un comentariu (privind activitatea de învățare desfășurată): ...



6 – PROPRIETĂȚI ALE FUNCȚIILOR CONTINUE PE INTERVALE. REZOLVAREA UNOR INECUAȚII

Titlu	Proprietăți ale funcțiilor continue pe intervale. Rezolvarea unor inecuații
Tip de activități	Interactive, aplicative
Competențe specifice vizate	CS.4.2. Exprimarea cu ajutorul noțiunilor de limită, continuitate, derivabilitate, monotonie, a unor proprietăți cantitative și calitative ale unei funcții CS.5.2. Utilizarea reprezentării grafice a unei funcții pentru verificarea unor rezultate și pentru identificarea unor proprietăți
Resurse implicate	1. Tablă interactivă/ecran pentru a prezenta informațiile și a lucra în timp real cu elevii 2. Calculator cu software/aplicația <i>Geogebra</i>
Strategii utilizate	1. Brainstorming: Elevii vor fi încurajați să participe la discuții în grup despre conceptul de soluție a unei ecuații, semnul unei funcții continue pe un interval. 2. Prezentare interactivă: Profesorul va folosi jocul didactic și va prezenta interactiv pe tabla smart sau pe ecran, procedeul de determinare a semnului unei funcții continue pe un interval, respectiv de identificare a unei soluții pentru ecuația $f(x) = 0$ și va explica cum se pot aplica algoritmi de calcul. 3. Lucru în echipe: Elevii vor fi împărțiți în echipe mici și vor rezolva colaborativ ecuații și inecuații. 4. Rezolvare de probleme practice: Elevii vor primi exemple concrete unde vor trebui să aplice cunoștințele despre continuitate și algoritmi de optimizare pentru a găsi soluții eficiente.
Activități de învățare și evaluare	
Introducere (10 minute)	<ul style="list-style-type: none"> Profesorul prezintă contextul activității, explică conceptul de soluție a unei ecuații, respectiv semnul unei funcții continue pe un interval și importanța sa <p>Aplicația 1:</p> <p>Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 2, & x \leq 2 \\ x + 2, & x > 2 \end{cases}$.</p> <p>a) Demonstrați că funcția este continuă în $x = 2$.</p> <p>b) Rezolvați ecuația $f(x) \leq 0$.</p> <ul style="list-style-type: none"> Elevii analizează un exemplu simplu de funcție continuă și se discută despre informațiile (referitoare la continuitate, rezolvare de ecuații și inecuații) ce pot fi extrase cu ușurință din lectura graficului. https://www.geogebra.org/m/he8zuyct
Evaluare feedback (5 minute) și	<p>Cerință de evaluare:</p> <p>Elevii trebuie să explice conceptul de soluție a unei ecuații, respectiv semnul unei funcții continue pe un interval și să identifice cel puțin două situații practice din domeniul economic, tehnic sau dintr-un alt domeniu de activitate. Cerință îndeplinită în condițiile în care:</p> <ul style="list-style-type: none"> elevii sunt îndrumați să caute pe surse online informații care fac trimitere la conceptul de semn al unei funcții continue pe un interval; elevii își notează în caiet exemplul/exemplele identificate.

Demonstrare interactivă și discuție (15 minute)	<ul style="list-style-type: none"> Profesorul prezintă interactiv, pe tablă sau pe ecran, modul în care se determină soluțiile unei ecuații și cum se rezolvă o inecuație. <p style="text-align: center;">Aplicația 2</p> <p>Fie funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^3 - 3x - 1$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = d$, $d \in \mathbb{R}$.</p> <ol style="list-style-type: none"> Determinați soluțiile ecuației $f(x) = 0$ Determinați valorile reale ale lui x, pentru care $f(x) \leq 0$ Demonstrați că ecuația $f(x) = g(x)$ are cel puțin o soluție, pentru orice $d \in \mathbb{R}$. Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $f(x) \leq g(x)$. <p>Elevii primesc linkul https://www.geogebra.org/m/tahsbzsa și discută despre informațiile ce pot fi extrase cu ușurință prin mutarea cursorului d.</p> <p>Elevii vor fi împărțiți în echipe mici și vor rezolva colaborativ, următoarea aplicație:</p> <p style="text-align: center;">Aplicația 3</p> <p>Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} e^x + x, & x \leq 0 \\ x^2 - x + a, & x > 0 \end{cases}$. Verificați dacă pentru orice $a \in \mathbb{R}$, ecuația $f(x) = a$ are cel puțin o soluție.</p> <p>https://www.geogebra.org/m/nwgcrvbc</p> <p>Fiecare grupă va prezenta concluziile și observațiile.</p>
Evaluare feedback (10 minute)	<p>Aplicație</p> <p>III.2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x}, & x \in (-\infty, 1) \\ \frac{2-x-x^2}{x}, & x \in (1, +\infty) \end{cases}$</p> <p>c) Demonstrați că, pentru orice număr real a, ecuația $f(x) = a$ are cel puțin o soluție.</p> <p>(Simulare Examen Național de Bacalaureat 2019, clasa a XI-a, M_tehnologic, subiectul III.2, c))</p> <p><u>Soluție</u></p> <p>Funcția f este continuă pe $(-\infty, 1)$, $(1, +\infty)$ și în $x = 1$, rezultă că f este continuă pe \mathbb{R}. Cum $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ și $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, avem $\text{Im}f = \mathbb{R}$, deci ecuația $f(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$ are cel puțin o soluție.</p> <p>Se verifică existența soluției: https://www.geogebra.org/m/gcvaekca</p>
Sinteză și concluzii (5 minute)	<ul style="list-style-type: none"> Profesorul rezumă principalele concepte și metode abordate în activitate. Elevii sunt încurajați să reflecteze asupra importanței continuității și să identifice alte situații în care pot aplica cunoștințele dobândite.
Autoevaluare și feedback (5 minute)	<p>Elevii vor scrie un jurnal în care vor reflecta asupra modului în care au abordat activitatea sub formă de joc cum au colaborat cu colegii și ce au învățat despre importanța continuității unei funcții.</p> <p>Elevii vor accesa testul <i>Kahoot</i> și vor răspunde la întrebări.</p> <p>https://create.kahoot.it/share/semnul-functiei-solutii/84aa383e-45cc-4f3e-bb90-72c9daedb41c</p>




În cadrul acestei secțiuni, propunem următoarele secvențe de activitate pentru clasa a XI-a, învățământ liceal, filiera tehnologică:

- 1 – TABEL DE TIP MATRICEAL. MATRICE
- 2 – MATRICE. CAZURI PARTICULARE DE MATRICE. EGALITATEA MATRICELOR
- 3 – MATRICE. ADUNAREA MATRICELOR
- 4 – MATRICE. ÎNMULȚIREA UNEI MATRICE CU UN SCALAR
- 5 - OPERAȚII CU MATRICE: ÎNMULȚIREA MATRICELOR
- 6 – OPERAȚII CU MATRICE. APLICAȚII

SECVENȚE DE ACTIVITATE

1 – TABEL DE TIP MATRICEAL. MATRICE

Titlu	Tabel de tip matriceal. Matrice
Tip de activități	Interactive, aplicative
Competențe specifice vizate	CS1.: <i>Identificarea unor situații practice, concrete, care necesită asocierea unui tabel de date cu reprezentarea matriceală a unui proces specific domeniului economic sau tehnic</i> CS2: <i>Asocierea unui tabel de date cu reprezentarea matriceală a unui proces</i>
Resurse implicate	<ol style="list-style-type: none"> 1. Tablă interactivă/ecran pentru a prezenta informațiile și a lucra în timp real cu elevii 2. Calculator cu software/aplicații de generare a matricelor și pentru efectuare calcul matriceal
Strategii utilizate	<ol style="list-style-type: none"> 1. Brainstorming: Elevii vor fi încurajați să participe la discuții în grup despre conceptul de tabel de tip matriceal, respectiv matrice, și problemele practice din domeniul economic, tehnic sau dintr-un alt domeniu de activitate. 2. Demonstrare interactivă: Profesorul va folosi jocul didactic și va prezenta interactiv pe tabla smart sau pe ecran, procesul/procedeul de introducere a noțiunii matematice. 3. Probleme practice: Elevii vor primi exemple concrete de situații din domeniul economic, tehnic sau dintr-un alt domeniu de activitate, unde vor trebui să aplice cunoștințele despre matrice și algoritmi de optimizare pentru a găsi soluții eficiente.
Activități de învățare și evaluare	
Introducere (10 minute)	<ul style="list-style-type: none"> • Profesorul prezintă contextul activității, explică și exemplifică noțiuni privind organizarea datelor, tabel de tip matriceal, respectiv matrice și importanța sa în domeniul economic, tehnic și nu numai. • Elevii primesc exemple simple de tabele de tip matriceal și discută despre informațiile ce pot fi extrase cu ușurință citind date situate pe liniile, respectiv pe coloanele tabelului.
Evaluare și feedback (5 minute)	Cerință de evaluare: Elevii trebuie să explice conceptul de matrice și să identifice cel puțin două situații practice din domeniul economic, tehnic sau dintr-un alt domeniu de activitate în care datele se pot organiza matriceal.

	<p>Cerință îndeplinită în condițiile în care:</p> <ul style="list-style-type: none"> - elevii caută pe surse online informații care fac trimitere la conceptul de matrice; - elevii își notează în caiet exemplul/exemplele găsite. <p>(Elevii vor fi îndumăși să acceseze doar surse generatoare de informații de profil, de exemplu: cataloage de prețuri, stocuri de marfă, baze de date, elemente de statistică etc.)</p>
<p>Demonstrare interactivă și discuție (20 minute)</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Profesorul propune elevilor un joc: Săritura calului pe tabla de șah. <p>Fiecare elev va primi o hârtie cu o tabla de șah și instrucțiunile jocului; de asemenea, pe tabla interactivă se va prezenta o tablă de șah.</p>  <p>Jocul constă în scrierea pe tablă a unor numere obținute în urma parcurgerii instrucțiunilor/pașilor descriși în continuare. Considerăm că poziția inițială a calului este la D7 și are valoarea egală cu 4.</p> <p>Pasul 1: Faceți 6 mutări ("săritura calului"). În fiecare căsuță în care ați ajuns, scrieți cu roșu, numărul mai mare cu 3 decât numărul din căsuța anterioară. De exemplu: dacă mutăm calul de la D7 la B6, atunci scriem 7 în căsuța B6. Dacă a doua mutată este din căsuța B6 în căsuța C4, atunci aceasta va avea valoarea 10.</p> <p>Pasul 2: Din căsuța în care ați ajuns, mai faceți alte 8 sărituri și scrieți în fiecare căsuță, cu albastru, numărul mai mic cu 5 decât numărul din căsuța anterioară.</p> <p>Pasul 3: Continuați și, din ultima căsuță în care ați ajuns, mai faceți alte 6 sărituri, scriind cu verde în căsuță, numărul de două ori mai mare decât numărul din căsuța anterioară.</p> <p>Pasul 4: Completați în căsuțele rămase cifra 0.</p> <p>Atenție! Dacă v-ați blocat la un anumit moment dat, completați în toate căsuțele rămase cifra 0.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Elevii completează tabla respectând instrucțiunile jocului, eventual, adresează întrebări lămuritoare. Profesorul îndrumă elevii să completeze tabla astfel încât să parcurgă mai mult din suprafața acesteia (marginile laterale, colțuri, suprafață centrală). • Profesorul dirijează completarea, pe tabla interactivă tabla de șah, de către elevii care au întâmpinat dificultăți în realizarea sarcinii pentru a explica suplimentar aspecte care s-au constituit în bariere de învățare.
<p>Evaluare feedback (10 minute)</p>	<p>Profesorul verifică modul în care elevii și-au completat tabla de șah și adresează aprecieri verbale. Fiecare elev depune la portofoliul personal această fișă de activitate (în situația în care există elevi care nu și-au finalizat sarcina de lucru, o vor finaliza acasă, în baza modelării pe tabla interactivă, dirijată de profesor).</p> <p>Cerință de evaluare:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Scrieți sub forma unei matrice datele înregistrate pe tabla de șah de pe tabla interactivă. Notați matricea <i>TS</i>. 2. Identificați valorile elementelor: $ts_{17}, ts_{25}, ts_{28}, ts_{32}, ts_{44}, ts_{53}, ts_{58}, ts_{62}, ts_{65}, ts_{71}, ts_{74}, ts_{83}, ts_{88}$. 3. Calculați suma elementelor de pe linia a treia a matricei <i>TS</i>. 4. Calculați suma elementelor de pe coloana a cincea a matricei <i>TS</i>. 5. Extrageți elementele din matricea <i>TS</i> pornind din colțul stânga sus până în colțul dreapta jos; Extrageți elementele din matricea <i>TS</i> pornind din colțul dreapta sus până în colțul stânga jos.



	<ol style="list-style-type: none">6. Eliminați din matricea <i>TS</i> linia a doua, linia a cincea, linia a șaptea, coloana a patra și coloana a șasea. Scrieți matricea nou obținută. Care este tipul acestei matrice?7. Extrageți elementele de pe linia a patra a matricei <i>TS</i>.8. Extrageți elementele de pe coloana a cincea a matricei <i>TS</i>.
Sinteză și concluzii (3 minute)	<ul style="list-style-type: none">• Profesorul rezumă principalele concepte introduse în timpul acestei activități. Ora viitoare se va reveni asupra activității, în special asupra cerințelor, în scopul introducerii matricelor pe diferite tipuri și completate cu diferite categorii de valori.• Elevii sunt încurajați să reflecteze asupra importanței conceptului matematic introdus și să identifice alte situații în care pot aplica cunoștințele dobândite.• Fișa de activitate va fi completată, acasă, cu cele 8 cerințe parcurse în timpul orei.
Autoevaluare și feedback (2 minute)	<p>Elevii vor scrie un jurnal în care vor reflecta asupra modului în care au abordat activitatea sub formă de joc, cum au colaborat cu colegii ce au învățat despre importanța acestei noțiuni matematice.</p> <p>Vor discuta, de asemenea, cum pot aplica aceste concepte și abilități în situații reale din domeniul lor de specializare.</p>



Item 1

Conținut: Matrice: tabel de tip matriceal

CS.1. Identificarea unor situații practice concrete, care necesită asocierea unui tabel de date cu reprezentarea matriceală a unui proces specific domeniului economic sau tehnic.

Trei firme comercializează televizoare, frigidere, telefoane mobile și laptopuri. Gelateriile „X” și „Y” vând trei tipuri de înghețată; cu fistic, cu căpșuni și cu ciocolată. Patru agenții de turism oferă excursii în Bulgaria și România. La chioșcul din apropierea școlii se vinde apă plată, apă minerală, suc natural, ceai și cafea. În tabelele de mai jos este prezentată situația vânzărilor produselor timp de o lună și numărul exemplarelor de fiecare tip. Asociați fiecare dintre tabelele matriceale **1-4** cu matricea corespunzătoare din **a)-d)**.

Tabele

1.

Produs Firma	Televizoare	Frigidere	Telefoane	Laptopuri
Firma 1	45	18	60	15
Firma 2	67	27	52	20
Firma 3	28	13	41	12

2.

Produs Gelateria	Înghețată cu fistic	Înghețată cu căpșuni	Înghețată cu ciocolată
Gelateria X	2450	1984	3260
Gelateria Y	3671	2700	5234

3.

Excursie Agenția	Excursie Bulgaria	Excursie România
Agenția 1	231	250
Agenția 2	423	500
Agenția 3	123	140
Agenția 4	452	600

4.

Produs Chioșc	Apă plată	Apă minerală	Suc natural	Ceai	Cafea
Chioșc	2340	1560	1000	980	890

Matrice:

a) $(2340 \ 1560 \ 1000 \ 980 \ 890)$

b) $\begin{pmatrix} 231 & 250 \\ 423 & 500 \\ 123 & 140 \\ 452 & 600 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 45 & 18 & 60 & 15 \\ 67 & 27 & 52 & 20 \\ 28 & 13 & 41 & 12 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2450 & 1984 & 3260 \\ 3671 & 2700 & 5234 \end{pmatrix}$

Răspuns corect: 1 → c; 2 → d; 3 → b; 4 → a.

Item 2

Conținut: Matrice: tabel de tip matriceal

CS.1. Identificarea unor situații practice concrete, care necesită asocierea unui tabel de date cu reprezentarea matriceală a unui proces specific domeniului economic sau tehnic.

Firma SC „COMPANIA” SRL are următoarea bilanță în luna curentă:

Cont	Denumire	Sume precedente		Rulaje perioadă		Sume totale		Solduri finale	
		D	C	D	C	D	C	D	C
301	Materii prime	289	143	0	0	289	143	146	0
3028	Alte materiale consumabile	397	38	0	359	397	397	0	0
303	Mat. de nat. ob. inv.	602	602	0	0	602	602	0	0
345	Produce finite	250	250	0	0	250	250	0	0
371	Mărfuri	10950	10075	0	0	10950	10075	875	0

Matricea asociată bilanței de mai sus este:

$$\begin{pmatrix} 289 & 143 & 0 & 0 & 289 & 143 & 0 & 0 \\ 397 & 38 & 0 & 359 & 397 & 397 & 0 & 0 \\ 602 & 602 & 0 & 0 & 602 & 602 & 0 & 0 \\ 250 & 250 & 0 & 0 & 250 & 250 & 0 & 0 \\ 10950 & 10075 & 0 & 0 & 10950 & 10075 & 875 & 0 \end{pmatrix}$$

Rezultatul calculului: $a_{12} + a_{57} + a_{35} \cdot a_{41} - a_{22} \cdot a_{44} - a_{56}$ este:

- A) 141481
- B) 243567
- C) 141443
- D) 141458

Răspuns corect: C)

Activitatea 1 de evaluare

CS1.: Identificarea unor situații practice, concrete, care necesită asocierea unui tabel de date cu reprezentarea matriceală a unui proces specific domeniului economic sau tehnic.

CS2: Asocierea unui tabel de date cu reprezentarea matriceală a unui proces.

Item 1: În urma măsurătorilor făcute, maestrul Costică și-a notat lungimile barelor metalice pe care le are în atelier:

Tipul barei/ Diametrul/Diagonala (mm)	Bară pătrată (m)	Bară dreptunghiulară(m)	Bară rotundă (m)
15 mm	2	4,5	3
25 mm	4	2	1,5
30 mm	3	3	3,5
50 mm	1,5	1	2
60 mm	2	1,5	2,5

- a) Treceți datele sub formă de matrice, pe care s-o notați cu B .
- b) Identificați care este tipul de bară cu lungimea cea mai mare. Scrieți rezultatul folosind notația clasică a elementelor unei matrice (b_{ij}).

- c) Indicați care elemente din tabloul matriceal/matrice au valori egale.
- d) Introduceți încă o linie, la sfârșitul tabelului, în care să treceți numărul totalul de metri pentru fiecare tip de bară, în parte.
- e) Se poate realiza un panou de gard de lungime $2m$ și lățime $1,5m$ din tipurile de bare pe care le are la în atelier? Câte variante are la dispoziție?

Nivel de bază	Nivel mediu	Nivel dezvoltat
a), b), c)	a), b), c), d)	a), b), c), d), e)

Item 2 (aplicație practică interdisciplinară)

Deschideți aplicația *Excel* de pe telefonul vostru!

- a) Introduceți măsurătorile maistrului Costică într-un foaie de lucru Excel.
- b) Marcați cu roșu elementele $a_{12}, a_{23}, a_{34}, a_{42}, a_{43}$.
- c) Însumați toate valorile ce corespund elementelor tabelului și treceți rezultatul obținut într-o celulă separată de tabel, eventual folosind funcțiile aplicației Excel.
- d) Dacă toate barele dreptunghiulare ar fi de același tip, ar putea maistrul Costică să realizeze un cadru metalic cu lungimea de $4m$ și lățimea de $3m$, doar prin îmbinare(sudare), nu și prin tăiere? Justificați răspunsul!
- e) Copiați tabelul într-o altă foaie de lucru, după care, ștergeți liniile a treia a patra ale acestuia. Marcați cu albastru elementele de pe diagonala principală (colț stânga sus → colț dreapta jos) a tabelului și efectuați suma valorilor obținute.

Nivel de bază	Nivel mediu	Nivel dezvoltat
a), b), c)	a), b), c), e)	a), b), c), d), e)

Item 3: Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 7 & -3 \\ 5 & 1 & 9 & -4 \end{pmatrix}$.

- a) Alegeți, din variantele de mai jos, tipul matricei (nr. linii, nr. coloane).
A. (3, 3) **B.** (3, 4) **C.** (4, 3) **D.** (4, 4)
- b) Completați spațiile punctate cu valorile elementelor corespunzătoare din matricea A .
 $a_{13} = 4$; $a_{22} = \dots$; $a_{31} = \dots$; $a_{14} = \dots$; $a_{11} + a_{22} + a_{33} = \dots$; $a_{14} + a_{23} + a_{32} = \dots$
- c) Scrieți matricea pe care o obțineți eliminând coloana a doua din matricea A . Notați această matrice cu litera inițială a prenumelui vostru.
- d) Scrieți matricea pe care o obțineți adăugând încă o linie, între linia a doua și linia a treia a matricei A . Notați această matrice cu litera inițială a numelui vostru.
- d1) Ce tip are matricea nou obținută?
- d2) Calculați suma elementelor de pe diagonala principală a acestei matrice.
- d3) Scrieți elemente de pe diagonala secundară a acestei matrice, sub forma unei matrice de tip coloană.
- e) Revenind la matricea inițială, scrieți transpusa acesteia.

Nivel de bază	Nivel mediu	Nivel dezvoltat
a), b), c)	a), b), c), e)	a), b), c), d), e)

Sugestie metodologică: cele trei sarcini de lucru se pot constitui ca momente/secvențe distincte în timpul unei lecții (dacă timpul didactic permite) sau pe parcursul a două lecții.

SECVENȚE DE ACTIVITATE
2 – MATRICE. CAZURI PARTICULARE DE MATRICE. EGALITATEA MATRICELOR

Titlu	Matrice. Cazuri particulare de matrice. Egalitatea matricelor
Tip de activități	Interactive, aplicative
Competențe specifice vizate	<p>CS.1. Identificarea unor situații practice concrete, care necesită asocierea unui tabel de date cu reprezentarea matriceală a unui proces specific domeniului economic sau tehnic.</p> <p>CS.2. Asocierea unui tabel de date cu reprezentarea matriceală a unui proces.</p>
Resurse implicate	<ol style="list-style-type: none"> 1. Tablă interactivă/videoproiector pentru a prezenta informațiile și a lucra în timp real cu elevii 2. Calculator cu software/aplicații de generare a matricelor și pentru efectuare de calcul matriceal (ex. <u>GeoGebra</u>)
Strategii utilizate	<ol style="list-style-type: none"> 1. Brainstorming: Elevii vor fi încurajați să dea exemple de situații practice din domeniul economic, tehnic sau dintr-un alt domeniu de activitate în care este necesară compararea, clasificarea unor date numerice organizate sub forma unor tabele de tip matriceal, pentru descoperirea unor proprietăți sau reguli. 2. Demonstrare interactivă: Profesorul va prezenta interactiv pe tabla smart sau pe ecran cazurile particulare de matrice, relația de egalitate a matricelor și proprietățile acestora (reflexivitate, simetrie, tranzitivitate). 3. Lucru în echipe: Elevii vor fi împărțiți în echipe mici și vor rezolva în grup cerințe legate de noțiunea <i>matrice, egalitatea matricelor</i>. 4. Probleme practice: Elevii vor primi exemple concrete de situații din domeniul economic, tehnic sau dintr-un alt domeniu de activitate care necesită asocierea unui tabel de date cu reprezentarea matriceală a unui proces și observarea unor asemănări și deosebiri.
Activități de învățare și evaluare	
Introducere (5 minute)	<ul style="list-style-type: none"> • Profesorul reactualizează noțiunea de matrice și evidențiază posibilele aplicații practice ale acesteia în domeniul tehnic sau economic. • Elevii primesc exemple simple de date organizate sub forma unor tabele de tip matriceal și discută anumite situații particulare (toate datele sunt nule, tabelul are același număr de linii și de coloane, datele pot fi organizate sub forma unui șir/vector dispus orizontal sau vertical etc.).
Evaluare și feedback (5 minute)	<p>Cerință de evaluare: Elevii trebuie să identifice situații practice din domeniul economic, tehnic sau dintr-un alt domeniu de activitate în care anumite date sunt reprezentate sub forma unor tabele particulare (de exemplu: două tabele conțin aceleași date, toate datele din tabel sunt nule, numărul de linii este egal cu numărul de coloane, toate elementele, cu excepția celor de pe diagonală, sunt nule etc.)</p> <p>Cerință îndeplinită în condițiile în care:</p> <ul style="list-style-type: none"> - elevii obțin din diferite surse informații care fac trimitere la conceptul prezentat; - elevii își notează în caiet exemplul/exemplele idn.
Demonstrare interactivă și discuție	<ul style="list-style-type: none"> • Profesorul prezintă elevilor cazurile particulare de matrice și notațiile corespunzătoare: matrice linie, matrice coloană, matrice pătratică/pătrată, matrice

(10 minute)	<p>nulă, matrice transpusă, matrice triunghiulară, matrice diagonală, matrice unitate, matrice simetrică.</p> <ul style="list-style-type: none">● Se introduce apoi definiția egalității matricelor și proprietățile acestei relații.● Elevii participă activ, notând conținuturile prezentate în caiet, punând întrebări și făcând observații.
Lucru în echipă (10 minute)	<ul style="list-style-type: none">● Elevii, organizați în echipe, rezolvă itemii din fișele de lucru distribuite de către profesor: <u>Fișa de lucru</u>● În fiecare echipă, elevii lucrează împreună pentru a rezolva sarcina de lucru și pentru a găsi soluții optime, folosind cunoștințele dobândite anterior, în cadrul activității.● Pentru a se încadra în timpul alocat acestei secvențe de activitate, o echipă își poate distribui/împărți sarcinile de lucru între membrii acesteia.
Prezentare și discuție (10 minute)	<ul style="list-style-type: none">● Fiecare echipă prezintă soluțiile găsite și argumentează alegerile lor.● Profesorul încurajează dezbateri și discuții între echipe pentru a fixa conceptele introduse.
Evaluare colegială, feedback (3 minute)	<ul style="list-style-type: none">● Prezentarea fiecărei echipe va fi evaluată de către celelalte echipe prin calificativ sau notă.
Sinteză și concluzii (5 minute)	<ul style="list-style-type: none">● Profesorul rezumă principalele concepte prezentate în cadrul activității și evidențiază necesitatea reprezentării datelor sau a proceselor specifice unor diverse domenii de activitate prin intermediul tabelelor de tip matriceal.● Elevii sunt încurajați să identifice situații practice concrete, care necesită asocierea unui tabel de date cu reprezentarea matriceală a unui proces specific domeniului economic sau tehnic și să conștientizeze importanța dezvoltării abilităților de analiză și prelucrare a datelor utilizând cunoștințele dobândite.● Sunt evidențiate facilitățile oferite de diverse aplicații care pot fi folosite în calculul matematic (ex. <u>GeoGebra</u>).
Autoevaluare și feedback (2 minute)	<p>Elevii vor scrie un jurnal în care vor reflecta asupra modului în care au abordat activitatea sub formă de joc cum au colaborat cu colegii ce au învățat despre importanța acestei noțiuni matematice.</p> <p>Vor discuta, de asemenea, cum pot aplica aceste concepte și abilități în situații reale din domeniul lor de specializare.</p>

FIȘĂ DE LUCRU

Alegeți răspunsul corect:

 1. Matricea unitate de ordin doi este: a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

 2. Matricea nulă de tip (2,3) este: a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
Completați enunțurile:

3. O matrice cu numărul liniilor egal cu numărul coloanelor se numește matrice

 4. Dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, atunci tA (transpusa lui A) este egală cu

Alegeți răspunsul corect:

 5. Pentru orice matrice A avem ${}^t({}^tA) = A$. a) Adevărat b) Fals

 6. Fie matricea $X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. Dacă $X = {}^tX$ atunci:

 a) $a = b = c$ b) $d = c, g = b, h = f$ c) $d = b, g = c, h = f$ d) $a = g, b = h, c = i$
7. Asociați noțiunile din prima coloană cu matricele corespunzătoare din a doua coloană, bifând căsuța corespunzătoare din tabelul de posibile răspunsuri:

A. I_3	a) $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$
	b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
B. O_3	c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$
C. Matrice coloană	d) $(3 \quad -2 \quad 7)$
D. Matrice linie	e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
E. Matrice triunghiulară	f) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

F. Matrice de tip (3,2)		g) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
-------------------------	--	--

Tabel al posibilelor răspunsuri (bifați căsuțele ce corespund asocierilor corecte):

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
A.						
B.						
C.						
D.						
E.						

Alegeți răspunsul corect:

8. Dacă $A \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ și $B \in M_3(\mathbb{R})$ atunci $A \neq B$. a) adevărat b) fals

9. Fie numerele reale x, y și z astfel încât
$$\begin{pmatrix} x^2 - 3x + 2 & 2x - y \\ -x + 2 & x - z \\ y + z & 2x + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & x + z \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Atunci:

a) $x = 2, y = 4, z = -2$ b) $x = 1, y = 4, z = 0$ c) $x = 1, y = 2, z = 0$ d) $x = 2, y = 4, z = 0$

Nr. item	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
Răspuns	c)	b)	pătratică	$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$	a)	c)	A - g) B - f) C - a) D - d) E - c) F - b)	a)	c)

SECVENȚE DE ACTIVITATE
3 – MATRICE. ADUNAREA MATRICELOR

Titlu	Matrice. Adunarea matricelor
Tip de activități	Interactive, aplicative
Competențe specifice vizate	<p>CS.1. Identificarea unor situații practice concrete, care necesită asocierea unui tabel de date cu reprezentarea matriceală a unui proces specific domeniului economic sau tehnic.</p> <p>CS.2. Asocierea unui tabel de date cu reprezentarea matriceală a unui proces.</p> <p>CS.3. Aplicarea algoritmilor de calcul cu matrice în situații practice.</p>
Resurse implicate	<ol style="list-style-type: none"> 1. Tablă interactivă/videoprojector pentru a prezenta informațiile și a lucra în timp real cu elevii 2. Calculator cu software/aplicații de generare a matricelor și pentru efectuare de calcul matriceal (ex. GeoGebra)
Strategii utilizate	<ol style="list-style-type: none"> 1. Brainstorming: Elevii vor fi încurajați să dea exemple de situații practice din domeniul economic, tehnic sau dintr-un alt domeniu de activitate în care este necesară însumarea unor date numerice, organizate sub forma unor tabele de tip matriceal. 2. Demonstrare interactivă: Profesorul va prezenta interactiv pe tabla smart sau pe ecran operația de adunare a matricelor și proprietățile acesteia. 3. Lucru în echipe: Elevii vor fi împărțiți în echipe mici și vor rezolva în grup cerințe legate de noțiunea <i>adunarea matricelor</i>. 4. Probleme practice: 5. Elevii vor primi exemple concrete de situații din domeniul economic, tehnic sau dintr-un alt domeniu de activitate care implică aplicarea algoritmilor de calcul cu matrice.
Activități de învățare și evaluare	
Introducere (5 minute)	<ul style="list-style-type: none"> • Profesorul prezintă contextul activității, introduce intuitiv/pornind de la situații reale noțiunea de adunare a matricelor și posibilele aplicații practice ale acesteia. • Elevii primesc un exemplu simplu de date numerice organizate sub forma unor tabele de tip matriceal și discută situații în care aceste date pot fi însumate.
Evaluare și feedback (5 minute)	<p>Cerință de evaluare: Elevii trebuie să explice cum se adună două matrice și să identifice cel puțin două situații practice din domeniul economic, tehnic sau dintr-un alt domeniu de activitate în care poate fi regăsită această modalitate de prelucrare a datelor (de exemplu: producția cumulată pe mai multe luni a unor tipuri de piese (produse) realizate în atelierul școlar sau la un agent economic, situația vânzărilor unor anumite tipuri de produse dintr-un magazin pe două luni (cumulate), tendințele stocului de mărfuri, utilizarea profitului, minimizarea pierderilor).</p> <p>Cerință îndeplinită în condițiile în care:</p> <ul style="list-style-type: none"> - elevii obțin din diferite surse informații care fac trimitere la conceptul prezentat; - elevii își notează în caiet exemplul/exemplele găsite.
Demonstrare interactivă și discuție (10 minute)	<p>Profesorul prezintă elevilor elementele prin care se definește operația de adunare a matricelor și proprietățile acesteia.</p> <p>Elevii participă activ, notând conținuturile prezentate în caiet, punând întrebări și făcând observații.</p>

<p>Lucru în echipă (10 minute)</p>	<ul style="list-style-type: none"> Elevii, organizați în echipe, primesc următoarea sarcină de lucru: <p>În trei ateliere A, B și C ale unui liceu tehnologic s-au produs 3 tipuri de piese (P1, P2, P3) în decursul a 2 luni (L1, L2), conform datelor din tabelele de mai jos:</p> <table border="1" data-bbox="427 376 1385 524"> <thead> <tr> <th></th> <th colspan="3">ATELIER A</th> <th colspan="3">ATELIER B</th> <th colspan="3">ATELIER C</th> <th colspan="3">ATELIER D</th> </tr> <tr> <th></th> <th>P1</th> <th>P2</th> <th>P3</th> <th>P2</th> <th>P3</th> <th>P3</th> <th>P1</th> <th>P2</th> <th>P3</th> <th>P1</th> <th>P2</th> <th>P3</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>L1</td> <td>1200</td> <td>1000</td> <td>1000-z</td> <td>x</td> <td>950</td> <td>1050</td> <td>1400</td> <td>1950</td> <td>1840</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>L2</td> <td>2x+5</td> <td>3y-20</td> <td>1100</td> <td>y</td> <td>820</td> <td>z</td> <td>750</td> <td>1700</td> <td>1310</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> </tbody> </table> <p>Atelierul D este în curs de modernizare și nu a produs piese în cele două luni.</p> <ol style="list-style-type: none"> Scrieți matricele A, B, C și D corespunzătoare producției fiecărui atelier. Determinați numerele naturale x, y și z astfel încât $A+B=C$. Există numere naturale x, y și z astfel încât $A+C=B+C$? Justificați răspunsul. <p>Fie x, y și z numere naturale determinate la cerința b).</p> <ol style="list-style-type: none"> Verificați dacă $(A+B)+C=A+(B+C)$. Ce proprietate a operației de adunare este evidențiată de egalitatea anterioară? Demonstrați că $A+B=B+A$, $A+C=C+A$, $B+C=C+B$. Ce proprietate a operației de adunare se verifică? Arătați că $C+D=D+C=C$. Cum se numește matricea D? Determinați matricele $A-B$, $B-C$, $C-A$, folosind faptul că prin „- M” înțelegem matricea care are toate elementele de semn opus elementelor matricei M și că $M-N=M+(-N)$. Există ateliere care în aceeași lună și pentru același tip de piesă au avut producții egale? <ul style="list-style-type: none"> Pentru rezolvarea sarcinii de lucru, elevii sunt îndrumați să folosească resursa educațională de la adresa https://www.geogebra.org/m/tad2kuct, creată pe platforma GeoGebra. 		ATELIER A			ATELIER B			ATELIER C			ATELIER D				P1	P2	P3	P2	P3	P3	P1	P2	P3	P1	P2	P3	L1	1200	1000	1000-z	x	950	1050	1400	1950	1840	0	0	0	L2	2x+5	3y-20	1100	y	820	z	750	1700	1310	0	0	0
	ATELIER A			ATELIER B			ATELIER C			ATELIER D																																											
	P1	P2	P3	P2	P3	P3	P1	P2	P3	P1	P2	P3																																									
L1	1200	1000	1000-z	x	950	1050	1400	1950	1840	0	0	0																																									
L2	2x+5	3y-20	1100	y	820	z	750	1700	1310	0	0	0																																									
<p>Prezentare și discuție (10 minute)</p>	<ul style="list-style-type: none"> Fiecare echipă prezintă soluțiile găsite și argumentează alegerile lor. Profesorul încurajează dezbateri și discuții între echipe pentru a fixa conceptele introduse. Sunt prezentate și discutate facilitățile oferite de resursa educațională folosită și de aplicația de calcul matematic GeoGebra. 																																																				
<p>Evaluare colegială, feedback (3 minute)</p>	<p>Prezentarea fiecărei echipe va fi evaluată de către celelalte echipe prin calificativ sau notă.</p>																																																				
<p>Sinteză și concluzii (5 minute)</p>	<ul style="list-style-type: none"> Profesorul rezumă principalele concepte prezentate în cadrul activității și evidențiază necesitatea prelucrării datelor prin intermediul unor algoritmi de calcul, în diverse domenii de activitate. Elevii sunt încurajați să reflecteze asupra importanței dezvoltării competenței de aplicare a algoritmilor de calcul cu matrice în situații practice și să identifice alte situații în care pot utiliza cunoștințele dobândite. 																																																				
<p>Autoevaluare și feedback (2 minute)</p>	<p>Elevii vor scrie un jurnal în care vor reflecta asupra modului în care au abordat activitatea sub formă de joc cum au colaborat cu colegii ce au învățat despre importanța acestei noțiuni matematice.</p> <p>Vor discuta, de asemenea, cum pot aplica aceste concepte și abilități în situații reale din domeniul lor de specializare.</p>																																																				

Exemplu de item 1**CS.3. Aplicarea** algoritmilor de calcul cu matrice în situații practice.

Calculați:

a) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ -11 & 21 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 5 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ -11 & 5 \\ 8 & -9 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ -11 & 21 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 5 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ -11 & 5 \\ 8 & -9 \end{pmatrix}$

Exemplu de item 2**CS.3. Aplicarea** algoritmilor de calcul cu matrice în situații practice.Determinați matricea X de tipul , știind că $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 \\ 6 & -2 & 3 \end{pmatrix} + X = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 2 \\ 8 & -5 & 3 \end{pmatrix}$.**Activitatea 2 de evaluare****Competențe specifice:****C1:** Identificarea unor situații practice, concrete, care necesită asocierea unui tabel de date cu reprezentarea matriceală a unui proces specific domeniului economic sau tehnic**C2:** Asocierea unui tabel de date cu reprezentarea matriceală a unui proces**C3:** Aplicarea algoritmilor de calcul cu matrice în situații practice**Item:**Un sudor are la dispoziție două tipuri de bare de diferite caracteristici pentru construirea unui cadru metalic în formă de cub cu lungimea laturii de $4m$.

Tipul barei	Bară de tip 1	Bară de tip 2
dreptunghiulară	13 lei/m	15 lei/m
rotundă	16 lei/m	20 lei/m

Barele dreptunghiulare au câte $6m$ lungime, iar cele rotunde au câte $8m$ lungime.(2p) a) Construiți matricea A asociată tabelului de mai sus, elementele corespunzând prețurilor exprimate în lei/m.(2p) b) Construiți matricea ale cărei elemente să reprezinte prețul total al fiecărui tip de bară. Notați matricea cu P .(2p) c) Analizând valorile care reprezintă prețul total al barelor după creșterea prețului per metru liniar, reprezentate de matricea $T = \begin{pmatrix} 90 & 96 \\ 140 & 164 \end{pmatrix}$, găsiți cu cât s-a scumpit metrul liniar pentru fiecare tip de bară. Scrieți rezultatele folosind notațiile clasice ale elementelor matricei S (scumpire).

(1p) d) Efectuați operația de scădere a celor două matrice.

(2p) e) Raportându-vă la prețul după scumpire, construiți matricea C a cărei elemente reprezintă prețul cadrului metalic. Ce fel de bară va trebui să folosească pentru a avea cel mai mic cost de producție?

Nivel de bază	Nivel mediu	Nivel dezvoltat
a), b), d)	a), b), c), d)	a), b), c), d), e)

Rezolvarea itemului

a) 2p	$A = \begin{pmatrix} 13 & 15 \\ 16 & 20 \end{pmatrix}$
b) 2p	$P = \begin{pmatrix} 78 & 90 \\ 128 & 160 \end{pmatrix}$
c) $0,25 \times 4$ =1p	$s_{11} = 12:6 = 2 \text{ lei/m}$ $s_{12} = 6:6 = 1 \text{ lei/m}$ $s_{21} = 12:8 = 1,5 \text{ lei/m}$ $s_{22} = 4:8 = 0,5 \text{ lei/m}$
d) $0,5 \times 4 = 2p$	$T - P = \begin{pmatrix} 90 & 96 \\ 140 & 164 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 78 & 90 \\ 128 & 160 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}$
e) 1p 1p	Lungime bară: $12 \times 4 = 48m$, $48:6 = 8$ bare de țevă dreptunghiulară $48:8 = 6$ bare de țevă rotundă $C = \begin{pmatrix} 720 & 768 \\ 840 & 984 \end{pmatrix}$ Costul minim este dacă folosește țevă dreptunghiulară de tip 1.

Sugestie metodologică: Sarcina de lucru poate fi privită ca un minitest de evaluare.

SECVENȚE DE ACTIVITATE
4 – MATRICE. ÎNMULȚIREA UNEI MATRICE CU UN SCALAR

Titlu	Matrice. Înmulțirea unei matrice cu un scalar
Tip de activități	Interactive, aplicative
Competențe specifice vizate	CS.2. Asocierea unui tabel de date cu reprezentarea matriceală a unui proces. CS.3. Aplicarea algoritmilor de calcul cu matrice în situații practice.
Resurse implicate	1. Tablă interactivă/ecran/videoproiector pentru a prezenta informațiile și a lucra în timp real cu elevii. 2. Calculator cu software/aplicații de generare a matricelor și pentru efectuare de calcul matriceal (ex. <u>GeoGebra</u>).
Strategii utilizate	1. Brainstorming: Elevii vor fi încurajați să dea exemple de situații practice din domeniul economic, tehnic sau dintr-un alt domeniu de activitate în care este necesară prelucrarea unor date numerice, organizate sub forma unor tabele de tip matriceal, prin multiplicarea acestora cu un număr real. 2. Demonstrare interactivă: Profesorul va prezenta interactiv pe tabla smart sau pe ecran operația de înmulțire a unei matrice cu un scalar și proprietățile acesteia. 3. Lucru în echipe: Elevii vor fi împărțiți în echipe și vor rezolva în grup probleme practice în care se utilizează operația de înmulțire a matricelor cu scalari. 4. Probleme practice: Elevii vor primi exemple concrete de situații din domeniul economic, tehnic sau dintr-un alt domeniu de activitate care implică în general aplicarea algoritmilor de calcul cu matrice și în particular a înmulțirii.
Activități de învățare și evaluare	
Introducere (5 minute)	<ul style="list-style-type: none"> Profesorul reactualizează cunoștințele anterioare și evidențiază importanța prelucrării datelor reprezentate sub forma tabelor de tip matriceal în situații practice din domeniul tehnic sau economic. Elevii primesc exemple simple de date numerice organizate sub forma unor tabele de tip matriceal și discută situația în care aceste date sunt multiplicare cu un număr real.
Evaluare și feedback (5 minute)	<p>Cerință de evaluare:</p> <ul style="list-style-type: none"> Elevii trebuie să identifice cel puțin o situație practică din domeniul economic, tehnic sau dintr-un alt domeniu de activitate în care poate fi regăsită/aplicată operația de înmulțire a unei matrice cu un scalar (de exemplu: creșterea/reducerea producției lunare de piese/vânzărilor de produse/exploatarea unor resurse naturale cu un anumit procent, dublarea sau înjumătățirea producției/vânzărilor unor anumite tipuri de produse, etc.). <p>Cerință îndeplinită în condițiile în care:</p> <ul style="list-style-type: none"> elevii obțin din diferite surse (online, manuale) informații care fac trimitere la conceptul de înmulțire a unei matrice cu un scalar; elevii își notează în caiet exemplul/exemplele găsite.

Demonstrare interactivă și discuție (10 minute)	<ul style="list-style-type: none"> • Profesorul prezintă elevilor definiția și proprietățile operației de înmulțire a matricelor cu scalari. • Elevii participă activ, notând conținuturile prezentate în caiet, punând întrebări și făcând observații. 																									
Lucru în echipe (10 minute)	<ul style="list-style-type: none"> • Elevii, organizați în echipe, primesc următoarea <u>sarcină de lucru</u>: Pe trei terenuri T1, T2, T3 aparținând fondului forestier dintr-un județ, s-au plantat 4 specii de arbori S1, S2, S3, S4, în decursul a trei luni. În prima lună s-a plantat un număr de arbori, conform datelor din tabelul de mai jos: <table border="1" data-bbox="501 568 1342 757" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th colspan="5">PRIMA LUNĂ</th> </tr> <tr> <th></th> <th>S1</th> <th>S2</th> <th>S3</th> <th>S4</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <th>T1</th> <td>1200</td> <td>1000</td> <td>1000</td> <td>900</td> </tr> <tr> <th>T2</th> <td>800</td> <td>900</td> <td>1100</td> <td>800</td> </tr> <tr> <th>T3</th> <td>1000</td> <td>800</td> <td>900</td> <td>700</td> </tr> </tbody> </table> <p>Pentru fiecare teren și fiecare specie de arbori, în luna a doua s-au plantat cu 25% mai mulți arbori decât în prima lună, iar în a treia lună numărul de arbori plantați a scăzut cu 20% față de luna a doua.</p> <p>Notăm cu A, B și C matricele asociate tabelelor de date care prezintă situația plantărilor din prima, a doua, respectiv a treia lună.</p> <ol style="list-style-type: none"> Aflați care este situația numărului de arbori care s-au plantat în plus în luna a doua față de prima lună, pe terenuri și pe specii, prezentând datele într-o formă matriceală. Aflați câți arbori s-au plantat, în total, în luna a doua, folosind eventual mijloace electronice de calcul/funcții ale unor aplicații electronice. Calculați cu câți arbori s-a plantat mai puțin în luna a treia față de luna a doua, pentru fiecare teren și specie de arbori. Aflați care este situația arborilor plantați în luna a treia, prezentând datele într-o formă matriceală. Comparați situația plantărilor din luna a treia cu situația plantărilor din prima lună. Realizați o modalitate de prezentare a comparațiilor făcute. Dacă $B = x \cdot A$, $C = y \cdot B$ și $C = z \cdot A$, determinați numerele x, y și z. Descoperiți o relație între x, y și z. <ul style="list-style-type: none"> • Pentru rezolvarea sarcinii de lucru, elevii sunt îndrumați să folosească resursa educațională de la adresa https://www.geogebra.org/m/x8peafwg, creată pe platforma <u>GeoGebra</u>. • O echipă își poate distribui sarcinile de lucru între membrii acesteia, pentru a se încadra în timpul alocat acestei secvențe a lecției. 	PRIMA LUNĂ						S1	S2	S3	S4	T1	1200	1000	1000	900	T2	800	900	1100	800	T3	1000	800	900	700
PRIMA LUNĂ																										
	S1	S2	S3	S4																						
T1	1200	1000	1000	900																						
T2	800	900	1100	800																						
T3	1000	800	900	700																						
Prezentare și discuție (10 minute)	<ul style="list-style-type: none"> • Fiecare echipă prezintă soluțiile găsite și argumentează alegerile lor. (Soluții: https://www.geogebra.org/m/nqcbctsb) • Profesorul încurajează dezbateri și discuții între echipe pentru a corecta eventualele erori și a fixa conceptele introduse. • Sunt prezentate și discutate facilitățile oferite de resursa educațională folosită și de aplicația de calcul matematic <u>GeoGebra</u>. 																									
Evaluare colegială, feedback (3 minute)	Prezentarea fiecărei echipe va fi evaluată de către celelalte echipe prin calificativ sau notă.																									

Sinteză și concluzii (4 minute)	<ul style="list-style-type: none">• Profesorul rezumă conceptul de înmulțire a matricelor cu scalari și evidențiază necesitatea prelucrării datelor prin intermediul unor algoritmi de calcul, în diverse domenii de activitate.• Elevii sunt încurajați să reflecteze asupra importanței dezvoltării competenței de aplicare a algoritmilor de calcul cu matrice în situații practice și să identifice alte situații în care pot utiliza cunoștințele dobândite.
Autoevaluare și feedback (3 minute)	Elevii vor scrie un jurnal în care vor reflecta asupra modului în care au abordat activitatea sub formă de joc cum au colaborat cu colegii ce au învățat despre importanța acestei noțiuni matematice. Vor discuta, de asemenea, cum pot aplica aceste concepte și abilități în situații reale din domeniul lor de specializare.

Exemplu de item 1Conținut: **Înmulțirea unei matrice cu un scalar**

CS.3. Aplicarea algoritmilor de calcul cu matrice în situații practice.

Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & -5 & 0 \\ -8 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ o matrice de tip și $\lambda = 5 \in C$. Calculați ${}^t(\lambda A)$.

Exemplu de item 2Conținut: **Înmulțirea unei matrice cu un scalar**

CS.3. Aplicarea algoritmilor de calcul cu matrice în situații practice.

Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -4 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$. Efectuați calculele: $2 \cdot {}^t A + (-3) \cdot {}^t B$.

Exemplu de item 3Conținut: **Înmulțirea unei matrice cu un scalar**

CS.3. Aplicarea algoritmilor de calcul cu matrice în situații practice.

Determinați matricea X de tipul (\dots, \dots) , știind că $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} + 2X = \begin{pmatrix} 7 & 21 \\ -12 & 11 \end{pmatrix}$.

SECVENȚE DE ACTIVITATE

5 - OPERAȚII CU MATRICE: ÎNMULȚIREA MATRICELOR

Titlu	Operații cu matrice: înmulțirea matricelor
Tip de activități	Interactive, aplicative
Competențe specifice vizate	CS2.: Asocierea unui tabel de date cu reprezentarea matriceală a unui proces CS3.: Aplicarea algoritmilor de calcul cu matrice în situații practice
Resurse implicate	3. Tablă interactivă/ecran pentru a prezenta informațiile și a lucra în timp real cu elevii. 4. Calculator cu software/aplicații de generare a matricelor și pentru efectuare calcul matriceal.
Strategii utilizate	5. Brainstorming: Elevii vor fi încurajați să participe la discuții în grup despre operația de înmulțire a două matrice și problemele practice din domeniul economic, tehnic sau dintr-un alt domeniu de activitate 6. Demonstrare interactivă: Profesorul va folosi jocul didactic și va prezenta interactiv pe tabla smart sau pe ecran, procesul/procedeele de introducere de înmulțire a două matrice și va explica cum se poate aplica algoritmul de calcul pentru înmulțire a două matrice. 7. Lucru în echipe: Elevii vor rezolva individual sau în grup cerințe legate de operația de înmulțire a matricelor. 8. Probleme practice: Elevii vor primi exemple concrete de situații din domeniul economic, tehnic sau dintr-un alt domeniu de activitate, unde vor trebui să aplice algoritmul de înmulțire a matricelor .
Activități de învățare și evaluare	
Introducere (5 minute)	<ul style="list-style-type: none"> Profesorul explică conceptul de înmulțire a matricelor, plecând de la următoarea întrebare despre comerțul electronic, adresată elevilor: <i>Câți dintre voi ați utilizat un site pentru achiziționarea unor produse?</i> Elevii primesc un exemplu de aplicație practică, respectiv un site, de unde să aleagă câteva cumpărături și prețurile aferente. Apoi discută cu profesorul despre cum se poate aplica înmulțirea matricelor în acest exemplu.
Evaluare și feedback (5 minute)	<p>Cerință de evaluare: Elevii trebuie :</p> <ul style="list-style-type: none"> să identifice cel puțin un site aferent comerțului electronic să aleagă 3-4 cumpărături și prețurile aferente să scrie matricea cumpărăturilor pe linii, iar cea a prețurilor pe coloană <p>Cerință îndeplinită în condițiile în care:</p> <ul style="list-style-type: none"> elevii caută pe surse online informații care fac trimitere la site-uri de comerț electronic elevii își notează în caiet exemplul găsit <p>(Elevii vor fi îndrumați să acceseze doar surse generatoare de informații de profil, de exemplu: cataloage de prețuri, stocuri de marfă etc.)</p>
Demonstrare interactivă și discuție	Activitatea se desfășoară utilizând <i>Fișa de lucru Liveworksheets</i> : https://www.liveworksheets.com/c?a=a&sr=n&im=n&ia=y&l=tz&i=sutzusx&r=rz&f=dzd tzoud&ms=uz&cd=dllizgpxzgxpmgngnzgjnngx&mw=hs

(6 minute)	<ul style="list-style-type: none"> Elevii primesc o problemă practică legată de produse/prețuri și sunt solicitați să completeze tabelele matriceale și să identifice cele două matrice aferente. Profesorul explică regula efectuării produsului celor două matrice, iar elevii o utilizează pe exemplul dat. 																																																	
Evaluare și feedback (4 minute)	<p>Cerință de evaluare:</p> <ul style="list-style-type: none"> completarea <i>Fișei de lucru Liveworksheets</i> <p>Cerință îndeplinită în condițiile în care:</p> <ul style="list-style-type: none"> răspunsurile corecte sunt marcate cu verde, cele greșite cu roșu, iar profesorul poate vedea toate fișele elevilor în timp real și poate iniția discuții asupra eventualelor erori observate. 																																																	
Lucru în echipe (12 minute)	<p>Clasa este împărțită în 3 grupe numerotate de la 1 la 3. Profesorul propune elevilor următorul joc didactic ”Prăjitura cu vișine”:</p> <p>Maria dorește să pregătească de ziua ei o prăjitură cu vișine. Ea dispune de două rețete. Cantitățile de ingrediente necesare, exprimate în kilograme, litri sau bucăți, sunt prezentate în tabelul de mai jos:</p> <table border="1" data-bbox="432 801 1353 992"> <thead> <tr> <th></th> <th>Ouă (buc)</th> <th>Zahăr (kg)</th> <th>Făină (kg)</th> <th>Ulei (l)</th> <th>Praf de copt (buc)</th> <th>Vișine (kg)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Rețeta 1</td> <td>4</td> <td>0,2</td> <td>0,25</td> <td>0,1</td> <td>1</td> <td>0,25</td> </tr> <tr> <td>Rețeta 2</td> <td>6</td> <td>0,25</td> <td>0,3</td> <td>0,15</td> <td>1</td> <td>0,3</td> </tr> </tbody> </table> <p>Pentru achiziționarea produselor Maria urmărește ofertele celor 3 magazine din zonă:</p> <table border="1" data-bbox="528 1099 1358 1402"> <thead> <tr> <th>Produse/Magazine</th> <th>Magazin 1</th> <th>Magazin 2</th> <th>Magazin 3</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Ouă (lei/buc)</td> <td>1</td> <td>1,2</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>Zahăr (lei/kg)</td> <td>4,5</td> <td>4</td> <td>4</td> </tr> <tr> <td>Făină (lei/kg)</td> <td>4</td> <td>4,5</td> <td>4</td> </tr> <tr> <td>Ulei (lei/l)</td> <td>9</td> <td>8</td> <td>7</td> </tr> <tr> <td>Praf de copt (lei/buc)</td> <td>0,25</td> <td>0,20</td> <td>0,25</td> </tr> <tr> <td>Vișine (lei/kg)</td> <td>12</td> <td>10</td> <td>12</td> </tr> </tbody> </table> <p>Profesorul afișează, pe tabla interactivă/ecran, fișa de lucru cu următoarele cerințe pentru elevi:</p> <ol style="list-style-type: none"> Scrieți matricele A și B aferente celor două tabele de cantități, respectiv de prețuri. Calculați costul preparării fiecărei rețete în cazul achiziționării alimentelor de la cele 3 magazine. Calculați care este prețul minim și prețul maxim pentru realizarea rețetei 1, respectiv rețetei 2? De la care magazin se pot achiziționa ingredientele prețului minim/maxim ale prăjiturii cu vișine? Dacă nu cunoaștem prețul unui ingredient, putem să aflăm prețul final al rețetelor de prăjitură? <ul style="list-style-type: none"> Profesorul insistă asupra condiției de înmulțire a două matrice: Pentru a înmulți două matrice trebuie ca numărul de coloane din prima matrice să fie egal cu numărul de linii din a doua matrice. 		Ouă (buc)	Zahăr (kg)	Făină (kg)	Ulei (l)	Praf de copt (buc)	Vișine (kg)	Rețeta 1	4	0,2	0,25	0,1	1	0,25	Rețeta 2	6	0,25	0,3	0,15	1	0,3	Produse/Magazine	Magazin 1	Magazin 2	Magazin 3	Ouă (lei/buc)	1	1,2	1	Zahăr (lei/kg)	4,5	4	4	Făină (lei/kg)	4	4,5	4	Ulei (lei/l)	9	8	7	Praf de copt (lei/buc)	0,25	0,20	0,25	Vișine (lei/kg)	12	10	12
	Ouă (buc)	Zahăr (kg)	Făină (kg)	Ulei (l)	Praf de copt (buc)	Vișine (kg)																																												
Rețeta 1	4	0,2	0,25	0,1	1	0,25																																												
Rețeta 2	6	0,25	0,3	0,15	1	0,3																																												
Produse/Magazine	Magazin 1	Magazin 2	Magazin 3																																															
Ouă (lei/buc)	1	1,2	1																																															
Zahăr (lei/kg)	4,5	4	4																																															
Făină (lei/kg)	4	4,5	4																																															
Ulei (lei/l)	9	8	7																																															
Praf de copt (lei/buc)	0,25	0,20	0,25																																															
Vișine (lei/kg)	12	10	12																																															

Prezentare și discuție (8 minute)	<ul style="list-style-type: none"> Câte un reprezentant al fiecărei grupe notează pe tablă rezultatele obținute și argumentează alegerile făcute. Profesorul încurajează dezbateri și discuții între echipe pentru corectarea eventualelor erori de calcul/raționament
Evaluare colegială, Feedback (3 minute)	Fiecare echipă trebuie să găsească prețul minim și maxim necesar realizării rețetelor, precum și magazinele de unde pot achiziționa produsele preparării rețetei 1, respectiv rețetei 2. Elevii completează un <i>mentimeter</i> referitor la cum s-au simțit rezolvând această problemă practică alături de colegii lor . https://www.menti.com/osdhpvtrv . Code 5992 7464
Sinteză și concluzii (4 minute)	<ul style="list-style-type: none"> Profesorul reamintește algoritmul de calcul ce implică matrice și insistă asupra condiției de înmulțire a două matrice. Pentru sintetizarea noțiunilor învățate elevii vor completa <i>quizizzul</i> https://quizizz.com/admin/quiz/64d53d0479053d0008020e60?source=quiz_share
Autoevaluare și feedback (3 minute)	Elevii completează chestionarul de autoevaluare și feedback în aplicația <i>mentimeter</i> : Mentimeter: https://www.menti.com/alzosfr8u99z . Code 7801 5979

Item 1.

Conținut: Matrice. Operații cu matrice

CS.2. Asocierea unui tabel de date cu reprezentarea matriceală a unui proces.

CS.3. Aplicarea algoritmilor de calcul cu matrice în situații practice.

O firmă care se ocupă cu distribuirea produselor farmaceutice (Dermatocosmetice; Dietă și nutriție; Remedii naturiste și Tehnică medicală) are un stoc ce se prezintă sub forma următorului tabel de tip matriceal:

	Dermatocosmetice	Dietă și nutriție	Remedii naturiste	Tehnică medicală
Stoc	6000	8000	3000	1000

Această firmă distribuie produsele la trei farmacii și face bilanțul vânzărilor la sfârșitul unui trimestru. Evidența repartizării numerice pe fiecare categorie în parte a fost făcută la o lună, sub forma următoarelor tabele de tip matriceal:

Luna 1:

Produs	Dermatocosmetice	Dietă și nutriție	Remedii naturiste	Tehnică medicală
Farmacia				
Farmacia 1	763	854	356	98
Farmacia 2	681	907	209	102
Farmacia 3	304	542	300	78

Luna 2:

Produs	Dermatocosmetice	Dietă și nutriție	Remedii naturiste	Tehnică medicală
Farmacia				
Farmacia 1	736	845	536	68
Farmacia 2	861	897	189	87
Farmacia 3	312	452	287	56

Luna 3:

Farmacia \ Produs	Dermatocosmetice	Dietă și nutriție	Remedii naturiste	Tehnică medicală
Farmacia 1	654	765	470	97
Farmacia 2	701	803	230	110
Farmacia 3	280	400	250	80

Firma deține trei autovehicule cu care face aprovizionarea de la producători, cât și distribuirea produselor. Primul autovehicul funcționează pe benzină cu un consum mediu lunar de 3000 l, al doilea pe motorină cu un consum mediu lunar de 3200 l, iar al treilea pe GPL cu un consum mediu lunar de 4000 l. Se știe că prețul benzinei este de 6,8 lei/l, al motorinei de 6,7 lei/l și al GPL de 3,3 lei/l.

- Calculați câte produse de fiecare fel au fost distribuite la finalul trimestrului fiecărei farmacie.
- Aflați câte produse au mai rămas firmei la finalul trimestrului.
- Firma își propune ca în trimestrul următor să-și dubleze distribuția produselor față de trimestrul anterior. Aflați cantitate minimă de produse cu care trebuie să se aprovizioneze.
- Calculați costul total al combustibilului pe o lună.

Rezolvare:

- Notăm cu A – matricea produselor distribuite în prima lună, cu B – matricea produselor distribuite a doua lună, cu E – matricea produselor distribuite a treia lună

$$A + B + E = \begin{pmatrix} 763 & 854 & 356 & 98 \\ 681 & 907 & 209 & 102 \\ 304 & 542 & 300 & 78 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 736 & 845 & 536 & 68 \\ 861 & 897 & 189 & 87 \\ 312 & 452 & 287 & 56 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 654 & 765 & 470 & 97 \\ 701 & 803 & 230 & 110 \\ 280 & 400 & 250 & 80 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2153 & 2464 & 1362 & 263 \\ 2243 & 2505 & 628 & 299 \\ 896 & 1394 & 837 & 214 \end{pmatrix}$$

- Dermatocosmeticele distribuite celor trei farmacii în cele trei luni sunt = 5292

Produsele de dietă și nutriție distribuite celor trei farmacii în cele trei luni sunt = 6363

Remediile naturiste distribuite celor trei farmacii în cele trei luni sunt = 2827

Produsele de tehnică medicală distribuite celor trei farmacii în cele trei luni sunt = 776

Notăm cu S – matricea produselor aflate în stoc și cu D – matricea produselor distribuite

$$S - D = \begin{pmatrix} 6000 & 8000 & 3000 & 1000 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5292 & 6363 & 2827 & 776 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 708 & 1637 & 173 & 224 \end{pmatrix}$$

- $2D = 2 \begin{pmatrix} 5292 & 6363 & 2827 & 776 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10584 & 12726 & 5654 & 1552 \end{pmatrix}$

$$2D - S = \begin{pmatrix} 10584 & 12726 & 5654 & 1552 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6000 & 8000 & 3000 & 1000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4584 & 4726 & 2654 & 552 \end{pmatrix}$$

- Notăm cu C – matricea consumurilor de carburanți $C = \begin{pmatrix} 3000 & 3200 & 4000 \end{pmatrix}$

$$\text{Notăm cu } P \text{ – matricea prețurilor carburanților } P = \begin{pmatrix} 6,8 \\ 6,7 \\ 3,3 \end{pmatrix}, \text{ iar produsul matricelor}$$

$$C \cdot P = \begin{pmatrix} 55040 \end{pmatrix} \text{ indică costul carburantului.}$$

 Resurse : <https://www.eduboom.ro>; <https://matrixcalc.org/ro>.

SECVENȚE DE ACTIVITATE
6 – OPERAȚII CU MATRICE. APLICAȚII

Titlu	Aplicații. Operații cu matrice.
Tip de activități	Interactive, aplicative
Competențe specifice vizate	CS.1. Identificarea unor situații practice concrete, care necesită asocierea unui tabel de date cu reprezentarea matriceală a unui proces specific domeniului economic sau tehnic. CS.2. Asocierea unui tabel de date cu reprezentarea matriceală a unui proces. CS.3 Aplicarea algoritmilor de calcul cu matrice în situații practice.
Resurse implicate	<ol style="list-style-type: none"> 1. Tablă interactivă/ecran pentru a prezenta informațiile și a lucra în timp real cu elevii. 2. Calculator cu software/aplicații de generare a matricelor și pentru efectuare calcul matriceal. 3. Platforma <i>Khan Academy</i> – contul pentru profesor.
Strategii utilizate	<ol style="list-style-type: none"> 1. Brainstorming: Elevii vor fi încurajați să participe la discuții frontale despre algoritmi de efectuare a operațiilor cu matrice, proprietăți și despre cum modelăm matriceal o situație a stocurilor și vânzărilor pentru un agent economic. 2. Fixarea cunoștințelor acumulate în mod interactiv: Profesorul va prezenta interactiv pe tablă sau pe ecran, secvențele recapitulative de pe platforma <i>KHAN Academy</i> (de la categoria Matematica/Recapitulare pentru BAC/Unitatea 7/Matrice) apoi va invita elevii să rezolve pe caiete exercițiile de antrenament pentru a le verifica împreună frontal. 3. Lucru în echipe: Elevii vor fi împărțiți în echipe mici și vor rezolva în grup seturi de itemi de consolidare. 4. Probleme practice: Elevii vor primi exemple concrete de situații din domeniul economic, unde vor trebui să aplice cunoștințele despre matrice și algoritmi de optimizare pentru a găsi soluții eficiente.
Activități de învățare și evaluare	
Introducere (7 minute)	<ul style="list-style-type: none"> • Profesorul prezintă contextul activității, reamintește noțiunile matrice, tipuri de matrice, reamintește tipurile de operații învățate anterior (adunare, înmulțire cu scalar, înmulțire) și recapitulează frontal proprietățile folosind resursele de pe platforma <i>KHAN Academy</i>. (rezolvând frontal exercițiile de la finalul materialelor teoretice sub forma unui mini-concurs) Proprietățile adunării matricelor (articol) Khan Academy Proprietățile înmulțirii matricei cu un scalar (articol) Khan Academy Proprietățile înmulțirii matricelor (articol) Khan Academy
Evaluare și feedback (de control) (3 min)	Cerință de evaluare: Elevii sunt rugați să acceseze link-ul primit pe telefon https://wordwall.net/ro/resource/59131155 sau https://create.kahoot.it/share/operatii-cu-matrice-proprietati/3dd95f90-ae9f-4b24-bf92-e2bb9a136620
Demonstrare interactivă și discuție (5 minute)	<ul style="list-style-type: none"> • Profesorul prezintă interactiv pe tablă sau pe ecran, un quiz referitor la rezolvarea unor ecuații matriceale care necesită aplicarea deprinderilor de efectuare a calculelor cu matrice și a proprietăților operațiilor cu matrice care se va rezolva frontal.

	<p>https://ro.khanacademy.org/math/recapitulare-pentru-bac/x2c6df36abf3fe8b5:matrice/x2c6df36abf3fe8b5:operatii-cu-matrice/quiz/x2c6df36abf3fe8b5:matrice-quiz-2</p> <ul style="list-style-type: none"> Elevii participă activ, aducând întrebări și propunând idei.
Evaluare și feedback (10 min)	<p>Elevii primesc un exemplu de problemă economică cu vânzări/stocuri și se discută cum se poate modela matriceal problema și cum se pot folosi operațiile cu matrice pentru a o rezolva.</p> <p>Cerință de evaluare:</p> <p>Elevii trebuie să scrie sub formă matriceală informațiile dintr-o problema referitoare la stocurile/vânzările de la un depozit/magazin și să rezolve itemii propuși. (ITEM APLICATIV1 sau ITEM APLICATIV2 - exemple model atașate în fișa următoare - https://drive.google.com/file/d/1I2TmbVKe5r-wt09cCgws-KhuyqBeM0Xj/view?usp=sharing)</p> <p>Cerință îndeplinită în condițiile în care:</p> <ul style="list-style-type: none"> elevii reușesc să transpună matriceal cerințele elevii reușesc să aplice algoritmi de calcul cu matrice la rezolvarea problemei <p>(Sugestie metodologică – după identificarea modalității de lucru pentru fiecare cerință se poate stabili ca sarcină individuală pentru acasă finalizarea calculelor numerice)</p>
Lucru în echipe (15 minute)	<ul style="list-style-type: none"> Elevii sunt împărțiți în echipe și primesc câteva probleme practice de aplicare a operațiilor cu matrice și de rezolvare a unor ecuații matriceale. <p><i>Fișa de lucru pe echipe (exemple model)</i></p> <p>https://drive.google.com/file/d/1I2TmbVKe5r-wt09cCgws-KhuyqBeM0Xj/view?usp=sharing</p> <ul style="list-style-type: none"> Fiecare echipă lucrează împreună pentru a identifica răspunsurile corecte și pentru a găsi soluții optime folosind operațiile cu matrice.
Prezentare și discuție, evaluare colegială (3 minute)	<ul style="list-style-type: none"> Fiecare echipă prezintă alternativ soluțiile găsite și argumentează alegerile lor. Profesorul încurajează dezbateri și discuții între echipe pentru a explora mai multe strategii de optimizare.
Sinteză și concluzii (4 minute)	<ul style="list-style-type: none"> Profesorul rezumă principalele concepte și metode de lucru abordate în activitate. Elevii sunt încurajați să reflecteze asupra importanței operațiilor cu matrice și să identifice alte situații în care pot aplica cunoștințele dobândite. (de exemplu, în programare)
Autoevaluare și feedback (3 minute)	<p>Elevii vor scrie un jurnal în care vor reflecta asupra modului în care au abordat activitatea sub formă de joc cum au colaborat cu colegii ce au învățat despre importanța acestei noțiuni matematice.</p> <p>Vor discuta, de asemenea, cum pot aplica aceste concepte și abilități în situații reale din domeniul lor de specializare.</p>
Temă de lucru acasă	<p>Elevii vor rezolva ca temă, individual, teste interactive de pe platforma <i>asq.ro</i> și <i>quizizz</i></p> <p>https://app.asq.ro/#/exe/-ME2gjQJ-HWgO-Iz7Rs3</p> <p>https://app.asq.ro/#/exe/-ME3W-YZL4NkT9O5b2OJ</p> <p>https://app.asq.ro/#/test/-MHusW2AQhRKMqByGF8W</p> <p>https://quizizz.com/admin/quiz/5fc3fe30040b83001bd8711f?createdByMe=true&searchLocale=</p> <p>https://quizizz.com/admin/quiz/64ce82799370a200083cd5fc?term=matrice&sortKey=_score&searchLocale=</p>

Resurse exemplu itemi	- de	https://drive.google.com/file/d/1I2TmbVKe5r-wt09cCgws-KhuyqBeM0Xj/view?usp=drive_link
--------------------------------------	---------	---

Activitatea 1 de evaluare (joc Săritura calului pe tabla de șah)

Competențe specifice:

CS2: Asocierea unui tabel de date cu reprezentarea matriceală a unui proces

CS3: Aplicarea algoritmilor de calcul cu matrice în situații practice

Fiecare elev va primi o hârtie cu tabla de șah din imagine.

Jocul constă în scrierea pe tablă a unor numere obținute în urma parcurgerii instrucțiunilor/pașilor următori. Considerăm că poziția inițială a calului este la D7 și are valoarea egală cu 4.

Pasul 1: Faceți 6 mutări ("săritura calului"). În fiecare căsuță în care ați ajuns, scrieți cu roșu, numărul mai mare cu 3 decât numărul din căsuța anterioară.

Pasul 2: Din căsuța în care ați ajuns, mai faceți alte 8 sărituri și scrieți în fiecare căsuță, cu albastru, numărul mai mic cu 5 decât numărul din căsuța anterioară.

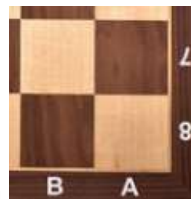
Pasul 3: Continuați și, din ultima căsuță în care ați ajuns, mai faceți alte 6 mutări, scriind cu verde în căsuță, numărul de două ori mai mare decât numărul din căsuța anterioară.

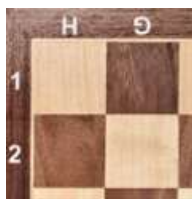

Pasul 4: Completați în căsuțele rămase cifra 0.

Atenție!: Dacă v-ați blocat la un anumit moment dat, completați în toate căsuțele rămase cifra 0. Încercați să realizați mutările, pe cât posibil să ajungeți la marginile tablei și în colțuri.

Cerințe:

- Scrieți sub forma unei matrice datele de pe tabla de șah. Notați matricea TS .
- Calculați suma elementelor de pe diagonala principală.
- Calculați suma tuturor elementelor matricei TS .
- Calculați suma și diferența dintre matricea TS și matricea TS^t (unde TS^t reprezintă transpusa matricei TS).



- Notăm cu A matricea  și cu B matricea  din tabla voastră de șah. Calculați
 - $3A + 2B$;
 - $4A - 3B + I_2$;
 - $A \cdot B + B \cdot A$;
 - $A^2 - B^2$;
 - $(A + B)^2$.

Nivel de bază	Nivel mediu	Nivel dezvoltat
a), c), d), e1), e2)	a), b), c), d), e1), e2), e3)	a), b), c), d), e1), e2), e3), e4), e5)

Sugestie metodologică: Se poate realiza activitatea integral în clasă sau completa tabla de șah în clasă, iar cerințele rămân în sarcina elevului ca temă de casă!

Activitatea 2 de evaluare**Competențe specifice:**

CS1: Identificarea unor situații practice, concrete, care necesită asocierea unui tabel de date cu reprezentarea matriceală a unui proces specific domeniului economic sau tehnic

CS2: Asocierea unui tabel de date cu reprezentarea matriceală a unui proces

CS3: Aplicarea algoritmilor de calcul cu matrice în situații practice

Nivel de bază**Item 1:**

Scrieți o matrice pătratică de ordinul 2 ale cărei elemente sunt:

- primele patru numere naturale nenule;
- termenii a_1, a_4, a_7 și a_9 ai șirului cu termenul general $a_n = \frac{n+2}{n}, n \geq 1$.

Item 2:

Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$. Calculați:

- $A + B$; b) $3A - 2B$; c) $A \cdot B$; d) $B \cdot A^t$; e) $A^2 + B^2$.

Nivel mediu**Item 1:**

Scrieți o matrice pătratică de ordinul 2 ale cărei elemente sunt:

- primii patru termeni ai unei progresii aritmetice, cu primul termen egal cu 5 și rația egală cu 7;
- primii patru termeni ai unei progresii geometrice, cu primul termen egal cu -2 și rația egală cu 3.

Item 2:

Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$. Calculați:

- $3A + 2B$; b) $A^2 + B^2 - A + B$; c) $A \cdot B - B \cdot A$; d) $(A + B)^2$; e) $(A + I_2)(B - I_2)$.

Nivel dezvoltat**Item 1:**

Scrieți o matrice pătratică de ordinul 2 a cărei elemente sunt:

- Termenii a_2, a_5, a_7 și a_9 ai unei progresii aritmetice, cu primul termen egal cu 5 și rația egală cu 7;
- Termenii a_2, a_4, a_6 și a_7 ai unei progresii geometrice, cu primul termen egal cu -2 și rația egală cu 3.

Item 2:

Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ și funcția $f(X) = X^2 - 2X + I_2$, definită pe mulțimea matricelor pătratice de ordinul 2. Calculați:

- $A + B$; b) $f(A)$; c) $f(A + B)$; d) $f(A) \cdot f(B)$; e) $f(A^2 - B^2)$.

Sugestii metodologice:

Activitatea se desfășoară pe grupe (3 grupe valorice); profesorul nominalizează trei elevii (nu neapărat din grupă) care vor monitoriza activitatea grupei pentru care au fost desemnați. Câte un elev din fiecare grupă va prezenta în fața clasei o secvență (aleasă de către profesor) din sarcina de lucru.

Activitatea 3 de evaluare (instrument de evaluare online)**Competențe specifice:****CS3: Aplicarea** algoritmilor de calcul cu matrice în situații practice**Sarcină de lucru**Accesați link-ul primit pe telefon <https://wordwall.net/resource/59073966>

Citiți cu atenție cerințele și alegeți răspunsul corect. Primiți bonus puncte cu cât răspunsul vostru este mai rapid!

- O matrice A de tipul (2, 3) cu elemente numere naturale se poate aduna cu o matrice B de tipul (2, 3) care are elemente numere reale.
ADEVĂRAT FALS
- O matrice A de tipul (2, 3) cu elemente numere reale se poate aduna cu o matrice B de tipul (3, 2) cu elemente numere reale.
ADEVĂRAT FALS
- Dacă A este o matrice pătratică de ordinul 2 cu elemente numere reale și B este o matrice pătratică de ordinul 3 cu elemente numere reale, atunci se poate efectua operația $3A-2B$.
ADEVĂRAT FALS
- Dacă A este o matrice pătratică de ordinul 2 cu elemente numere complexe, atunci se poate efectua operația $(2+i)A$.
ADEVĂRAT FALS
- O matrice A de tipul (2, 3) cu elemente numere reale se poate înmulți cu o matrice B de tipul (3, 2) care are elemente numere reale.
ADEVĂRAT FALS
- Se poate realiza operația de înmulțire dintre o matrice A de tipul (2, 4) și transpusa ei.
ADEVĂRAT FALS
- Două matrice pătratice de ordin 2 cu elemente numere reale se pot înmulți între ele.
ADEVĂRAT FALS
- Adunarea a două matrice de același tip este o operație asociativă.
ADEVĂRAT FALS
- Operația de înmulțire a matricelor, atunci când se poate realiza, are proprietatea de comutativitate.
ADEVĂRAT FALS
- Puterea unei matrice se poate defini doar pentru matrice pătratică.
ADEVĂRAT FALS

Nivel de bază	Nivel mediu	Nivel dezvoltat
5-6 răspunsuri corecte	7-8 răspunsuri corecte	9-10 răspunsuri corecte

Sugestii metodologice: Activitatea se poate realiza și sub forma unui test rapid în format letric aplicat elevilor.

Activitatea 4 de evaluare – exemple de itemi care ilustrează aplicațiile operațiilor cu matrice în domeniul economic

Competențe specifice:

CS.1. Identificarea unor situații practice concrete, care necesită asocierea unui tabel de date cu reprezentarea matriceală a unui proces specific domeniului economic sau tehnic

CS.2. Asocierea unui tabel de date cu reprezentarea matriceală a unui proces

CS.3. Aplicarea algoritmilor de calcul cu matrice în situații practice

ITEM APLICATIV 1

O rețea de librării comercializează auxiliare didactice de la mai multe edituri. Pentru a putea compara eficiența echipelor de vânzări din 4 librării, managerul rețelei a solicitat situația vânzărilor din 3 luni ale anului 2023, pentru 5 edituri. Tabelele completate de responsabilii a trei dintre librării sunt:

LIBRĂRIA A

	Editura 1	Editura 2	Editura 3	Editura 4	Editura 5
August	76	73	82	75	79
Septembrie	69	72	71	65	64
Octombrie	212	185	195	209	175

LIBRĂRIA B

	Editura 1	Editura 2	Editura 3	Editura 4	Editura 5
August	73	84	91	92	96
Septembrie	81	102	85	71	105
Octombrie	195	217	201	183	237

LIBRĂRIA C

	Editura 1	Editura 2	Editura 3	Editura 4	Editura 5
August	107	125	123	135	154
Septembrie	97	104	109	123	131
Octombrie	142	138	129	142	n

- Scrieți sub formă matriceală informațiile de la librăriile A,B și C și calculați vânzările totale ale Editurii 1 în cele 3 luni la toate cele 3 librării și vânzările Editurii 3 în luna septembrie la toate cele 3 librării.
- Scrieți matricea corespunzătoare vânzărilor de la LIBRĂRIA D dacă managerul a observat că volumul de carte este egal cu diferența dintre dublul vânzărilor de la LIBRĂRIA A și vânzările de la LIBRĂRIA B.
- Dacă prețurile medii ale unui auxiliar sunt date în tabelul de mai jos, calculați folosind calculul matriceal încasările din vânzări ale librăriei A pe toate cele 3 luni, notând cu A matricea informațiilor de la librăria A și cu P matricea prețurilor auxiliarelor.

	Editura 1	Editura 2	Editura 3	Editura 4	Editura 5
Preț mediu/aux	30	28	25	24	25

- Calculați câte exemplare ale Editurii 5 a vândut în octombrie LIBRĂRIA C dacă încasările celor trei librării pentru această editură a fost de 29025 de lei.

Nivel bază	de	Nivel mediu	Nivel dezvoltat
a), b),		a), b), c)	a), b), c), d)

ITEM APLICATIV 2

O firmă solicită unor angajați să lucreze suplimentar față de programul standard de lucru, în acest caz aceștia fiind plătiți, pentru oră lucrată suplimentar, cu 25% mai mult decât munca prestată în timpul programului standard de lucru, dacă ora efectuată este în timpul săptămânii de lucru (luni-vineri), respectiv cu 50% mai mult în zilele de week-end (sâmbătă-duminică). O oră de muncă prestată în timpul programului normal este plătită cu 40 de lei. Pentru lunile septembrie și octombrie, serviciul contabilitate a primit următorul pontaj:

SEPTEMBRIE

Nume salariat	Nr.ore lucrate program normal	Nr.ore lucrate peste programul standard (luni-vineri)	Nr.ore lucrate în week-end
X	160	20	12
Y	160	15	10
Z	160	24	8

OCTOMBRIE

Nume salariat	Nr.ore lucrate program normal	Nr.ore lucrate peste program	Nr.ore lucrate în week-end
X	160	12	20
Y	160	14	18
Z	160	3	n

Plata drepturilor salariale a celor trei angajați se va face folosind un produs de două matrice, una notată cu M (în care sunt trecute numărul de ore lucrate individual de cei 3 salariați) și cealaltă notată cu P (în care sunt trecute cele 3 sume reprezentând drepturile salariale pe oră în cele 3 situații precizate anterior).

- Scrieți matricea M pentru luna septembrie și precizați tipul acesteia.
- Aflați ce sume, exprimate în lei, vor primi salariații pe oră peste programul standard al zilelor lucrătoare, respectiv în week-end, apoi scrieți matricea P.
- Calculați, folosind calculul matriceal, ce venituri a încasat salariatul X pentru ambele luni.
- Stabiliți care dintre angajații X și Y a câștigat mai mult în ambele luni.
- Aflați câte ore a lucrat în week-end salariatul Z dacă în luna octombrie a încasat aceeași sumă cu angajatul Y în luna septembrie.

Nivel bază	de	Nivel mediu	Nivel dezvoltat
a), b),		a), b), c),d)	a), b), c), d).e)

Activitatea 2 de evaluare – destinată organizării pe grupe cuprinzând și secvențe de evaluare individuală folosind instrumente digitale

Exemple de fișe de lucru pe echipe – mini concurs

FIȘA 1

Activitatea 1 – interactivă, utilizând instrumente digitale – rezolvare individuală

Accesați link-ul primit pe telefoane și răspundeți individual la întrebări.

Link-ul de acces se va trimite ca mesaj pe telefoanele elevilor sau pentru logare în aplicația QUIZZZZ; dacă sunt logați se poate da codul numeric de acces.

<https://quizizz.com/admin/quiz/5fc3fe30040b83001bd8711f?createdByMe=true&searchLocale=>

Sugestii de organizare și precizări metodologice:

1. Profesorul poate da start *Quiz*-ului dacă dorește ca elevii să rezolve simultan mini-testul.
 2. Se va calcula punctajul general al echipei ca sumă a rezultatelor individuale.
 2. Quiz-ul funizează întrebările aleator fiecărui elev și cu temporizare (30s pentru o întrebare, 1p pentru o întrebare) pentru a descuraja elevii să colaboreze în această etapă destinată activității individuale.
 3. Putem, de asemenea să folosim varianta “Plickers” a quiz-ului, sau cea a rezolvării pe foaie.
- Varianta “Plickers” ajută la evaluarea rapidă a răspunsurilor elevilor atunci când nu dorim ca elevii să se folosească de telefoane (se folosesc Q-carduri, furnizate de Quizziz care se prindează pentru fiecare elev/grupă de elevi și se verifică instant răspunsurile corecte prin scanarea cu telefonul, de către profesor a Q-cardurilor).

Varianta listată:

QUIZZ NAME: _____
CLASS: _____
DATE: _____

Matrici - recapitulare
10 Questions

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ Care este transpusa matricii A?

A $A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ B $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

C $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ D $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

2. Care este transpusa matricii $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$?

A $A^t = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ B $A^t = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

C $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ D $A^t = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

3. Pentru a aduna două matrice

A Adunăm elementele primei matrice cu elementele respective din a doua matrice

B Adunăm liniile cu coloanele

C Adunăm coloanele cu liniile

D Adunăm prima linie din prima matrice cu toate elementele din matricia a doua

4. Pentru a afla transpusa unei matrice procedăm în felul următor:

A Schimbăm liniile între ele B Schimbăm liniile cu coloanele

C Schimbăm elementele matricii între ele D Schimbăm coloanele între ele

5. Pentru a înmulți o matrice cu un scalar (număr) procedăm în modul următor:

A Înmulțim liniile cu coloanele matricii. B Înmulțim (scalerul) înmulțim cu prima coloană a matricii.

C Înmulțim (scalerul) înmulțim cu prima linie a matricii. D Înmulțim (scalerul) înmulțim cu fiecare element al matricii.

6. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ Dacă înmulțim cu 2 matricia A obținem:

A $2A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ 4 & 10 & 6 \end{pmatrix}$

B $2A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

C $2A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 4 & 10 & 6 \end{pmatrix}$

D $2A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 10 & 6 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 8 & 5 & -14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 8 & 5 & -2 \end{pmatrix}$

A $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 8 & 5 & -14 \end{pmatrix}$

B $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 8 & 5 & -2 \end{pmatrix}$

C $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 8 & -5 & -2 \end{pmatrix}$

D $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 8 & 5 & -2 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} x & y & z \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ x & y & z \end{pmatrix}$ Știind că $A = B$, determinap $x, y, z \in \mathbb{Z}$

A $x = -10, y = 5, z = -1$

B $x = -12, y = 5, z = 1$

C $x = -11, y = 5, z = 1$

D $x = -12, y = 5, z = -1$

9. $x \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ Determină numerele $x, y, z, t \in \mathbb{Q}$ știind că:

A $x = 6, y = -\frac{5}{2}, z = 0, t = -\frac{1}{2}$

B $x = 6, y = -\frac{2}{5}, z = 0, t = -\frac{1}{2}$

C $x = 6, y = -\frac{5}{2}, z = 0, t = -2$

D $x = 6, y = -\frac{5}{2}, z = 3, t = -\frac{1}{2}$

10.  îți dorești 1 punct din oficiu?

A Da

B Nu

Pentru *Plickers*, suntem direcționați direct din contul de profesor de pe *Quizizz* și ne sunt indicate etapele de urmat pentru desfășurarea jocului:

Introducing *Paper mode*

Engage students without devices.

What you need:

- STEP 1 Print Q-cards and distribute them to students
- STEP 2 Start the quiz on your computer
- STEP 3 Open the Quizizz mobile app to start scanning student responses

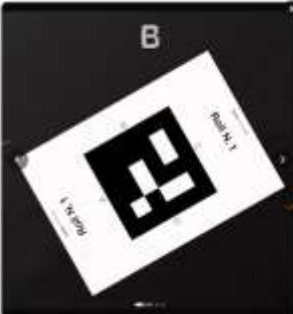


Introducing *Paper mode*

Engage students without devices.

What you need:

- STEP 1 Print Q-cards and distribute them to students
- STEP 2 Start the quiz on your computer
- STEP 3 Open the Quizizz mobile app to start scanning student responses




Introducing *Paper mode*

Engage students without devices.

What you need:

- STEP 1 Print Q-cards and distribute them to students
- STEP 2 Start the quiz on your computer
- STEP 3 Open the Quizizz mobile app to start scanning student responses




Introducing *Paper mode*

Engage students without devices.

What you need:

- STEP 1 Print Q-cards and distribute them to students
- STEP 2 Start the quiz on your computer
- STEP 3 Open the Quizizz mobile app to start scanning student responses



Activitatea 2 – rezolvare de exerciții și probleme (în echipă)

Item1. Se dau matricele $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Determinați $2A + B^2$.

Item2. Determinați numerele reale a, b, c, d pentru care matricea $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ verifică relația $2B + 6I_2 = O_2$.

Item3. Se dă mulțimea $M = \{X(a) = \begin{pmatrix} 1+a & a \\ -a & 1-a \end{pmatrix} / a \in \mathbb{R}\}$.

- Să se calculeze $2X(1) - X(2) \cdot X(-1)$.
- Să se demonstreze că $X(a)X(b) = X(a+b)$.

Item4. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculați A^{100} .

Nivel de bază	Nivel mediu	Nivel dezvoltat
Item1	Item1	Item1
Item2	Item2	Item2
	Item3a	Item3a,b
		Item4

FIȘA 2

Activitatea 1 – interactivă, utilizând instrumente digitale- activitate individuală

Folosiți link-ul de mai jos și răspundeți individual la întrebări. Se va calcula punctajul general al echipei ca sumă a rezultatelor individuale.

Link-ul de acces pentru tablete/laptop/trimis ca mesaj pe telefoanele elevilor sau elevii se loghează în aplicația QUIZZ (dacă au create conturi de elev și introduc codul de acces)

<https://quizizz.com/admin/quiz/64ce82799370a200083cd5fc?term=matrice&sortKey=score&searchLocale=>

Varianta listată:

Quizizz NAME: _____ CLASS: _____ DATE: _____

Matrice. Operații cu matrice. Exerciții interactive pe grupuri. 14 Questions.

- O matrice se numește pătratică dacă:
 - A) Toate elementele matricei sunt egale
 - B) Numărul de coloane este egal cu doi
 - C) Numărul de linii este egal cu numărul de coloane
 - D) Numărul de linii este egal cu patru
- Analizată a doua matrice este posibilă data:
 - A) Matricele sunt pătratice
 - B) Numărul de linii din prima matrice este egal cu numărul de coloane din matricea a doua.
 - C) Matricele sunt de același tip.
 - D) Numărul de coloane din prima matrice este egal cu numărul de linii din matricea a doua.
- O matrice se numește matrice coloană dacă:
 - A) Nu are coloane
 - B) Toate elementele de pe coloane sunt egale cu zero
 - C) Are mai multe linii și două coloane
 - D) Are două coloane și o linie
- Pentru a adăuga două matrice:
 - A) Adăugăm elementele primei matrice cu elementele respective din a doua matrice
 - B) Adăugăm liniile cu coloanele
 - C) Adăugăm coloanele cu liniile
 - D) Adăugăm prima linie din prima matrice cu toate elementele din matricea a doua

- Pentru a ridica la putere o matrice procedăm astfel:
 - A) Înmulțim liniile matricei cu coloanele
 - B) Ridicăm la putere toate elementele matricei
 - C) Înmulțim matricele între ele
 - D) Înmulțim cu doi elementele matricei
- Pentru a afla transpusa unei matrice procedăm în felul următor:
 - A) Schimbăm cu locul elementele matricei între ele
 - B) Schimbăm cu locul liniile între ele
 - C) Schimbăm cu locul liniile cu coloanele
 - D) Schimbăm cu locul coloanele între ele
- O matrice se numește matrice unitară sau matrice unitate dacă:
 - A) Este pătratică
 - B) Toate elementele de pe diagonala principală sunt egale cu unu iar celelalte toate elemente sunt zero.
 - C) Toate elementele sunt egale cu zero.
 - D) Toate elementele sunt egale cu unu.
- O matrice se numește nulă dacă:
 - A) Toate elementele sunt egale cu zero
 - B) Pe diagonala principală elementele sunt zero, celelalte egale cu unu
 - C) Nu are deloc elemente
 - D) Toate elementele sunt egale cu unu
- Pentru a înmulți o matrice cu un scalar (număr) procedăm în modul următor:
 - A) Înmulțim fiecare număr din prima coloană a matricei.
 - B) Înmulțim fiecare număr din fiecare element al matricei.
 - C) Înmulțim fiecare număr din prima linie a matricei.
 - D) Înmulțim liniile cu coloanele matricei.

Activitatea 2 – rezolvare de exerciții și probleme (în echipă)

Item1. Se dau matricele $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Determinați $A^2 - 3B$.

Item2. Să se determine matricea $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ care verifică ecuația matricială:

$$2X - \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Item3. Să se determine matricele $X, Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ care verifică simultan relațiile:

$$X + 2Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ și } 3X - Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Item4. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculați A^{100} .

Nivel de bază	Nivel mediu	Nivel dezvoltat
Item1	Item1	Item1
Item2	Item2	Item2
	Item3	Item3
		Item4

Exemple de itemi de control care pot fi utilizați cu ușurință în Kahoot sau Wordwall

„Alegeți dacă enunțul este adevărat sau fals.” (în Kahoot) sau
 „Ordonăți cuvintele pentru a obține un enunț adevărat.” (în Wordwall).

- Adunarea matricelor este operație asociativă.
- Înmulțirea matricelor nu este operație comutativă.
- O matrice de tip (2,3) se poate înmulți cu una de tip (3,3).
- Matricea unitate are 1 pe diagonala principală și 0 în rest.
- Două matrice egale sunt de același tip.

6. Transpusa unei matrice de tip $(2,3)$ nu se poate înmulți cu o matrice pătratică cu 2 linii.
7. Suma elementelor matricei unitate de ordin 3, cu elemente numere reale, este 3.
8. Produsul elementelor matricei unitate de ordin 2, cu elemente numere reale, este 0.
9. Înmulțirea matricelor este operație asociativă.
10. Matricele pătratice au număr par de elemente.

Fișă de lucru (itemi dați la examenul de bacalaureat)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ și $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Arătați că $2B - A = 3C$.

c) Determinați matricea $X \in M_2(\mathbb{R})$ pentru care $2X \cdot A = B + 2C$.

Sesiunea I, 2023

2. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Arătați că $A - 4I_2 = 3B$.

c) Determinați matricea $X \in M_2(\mathbb{R})$ pentru care $X + X \cdot B = A$.

Sesiunea a II-a, 2022

3. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Arătați că $2B + I_2 = 3A$.

c) Determinați matricea $X \in M_2(\mathbb{R})$ pentru care $A \cdot X - B \cdot X = I_2 - X$.

Sesiunea I, 2021

4. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ și $B(x) = \begin{pmatrix} x & -2x \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

b) Arătați că $3B(2) + B(6) = 4B(3)$.

c) Determinați numărul real x pentru care $(B(-x) - B(x)) \cdot (B(-x) + B(x)) = A + B(3)$.

Sesiunea a II-a, 2021

5. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Arătați că $3A - A \cdot A = 4I_2$.

c) Determinați numărul real x pentru care $(xA - I_2) \cdot (xA - I_2) = 5A - I_2$.

Sesiunea I, 2020

6. Se consideră matricele $A(a) = \begin{pmatrix} a+1 & 1 \\ 1 & a-1 \end{pmatrix}$.

b) Arătați că $A(a) \cdot A(-a) = (2 - a^2)I_2$, pentru orice număr real a , unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Determinați matricea $X \in M_2(\mathbb{R})$, știind că $A(1) \cdot X = A_2$.

Sesiunea a II-a, 2020

7. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 6 & -10 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $M(a) = I_2 + aA$, unde a este număr real.

b) Demonstrați că $M(a) \cdot M(b) = M(a + b + ab)$, pentru orice numere reale a și b .



c) Determinați numărul real a pentru care $M(1) + M(2) + \dots + M(2019) = 2019M(a)$.

Sesiunea I, 2019

8. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ și $M(a) = \begin{pmatrix} 1+a & -a \\ a & 1-a \end{pmatrix}$.

b) Demonstrați că $M(a) \cdot M(b) = M(a+b)$, pentru orice numere reale a și b .

c) Determinați matricea $X \in M_2(\mathbb{R})$ pentru care $M(1) \cdot X \cdot M(2) = A$.

Sesiunea a II-a, 2019

MyMathLab

Scurtă descriere: <https://en.wikipedia.org/wiki/MyMathLab>

Pagini web:

<https://www.mashupmath.com/blog/mymathlab-about>

https://www.mathxl.com/home_mmls.htm

<https://mlm.pearson.com/northamerica/mymathlab/>

Demos

<https://www.desmos.com/>

Khan Academy

<https://www.khanacademy.org/>

University of Cambridge

<https://nrich.maths.org/>

DeltaMath

<https://www.deltamath.com/>

Wolfram Math

<https://mathworld.wolfram.com/>

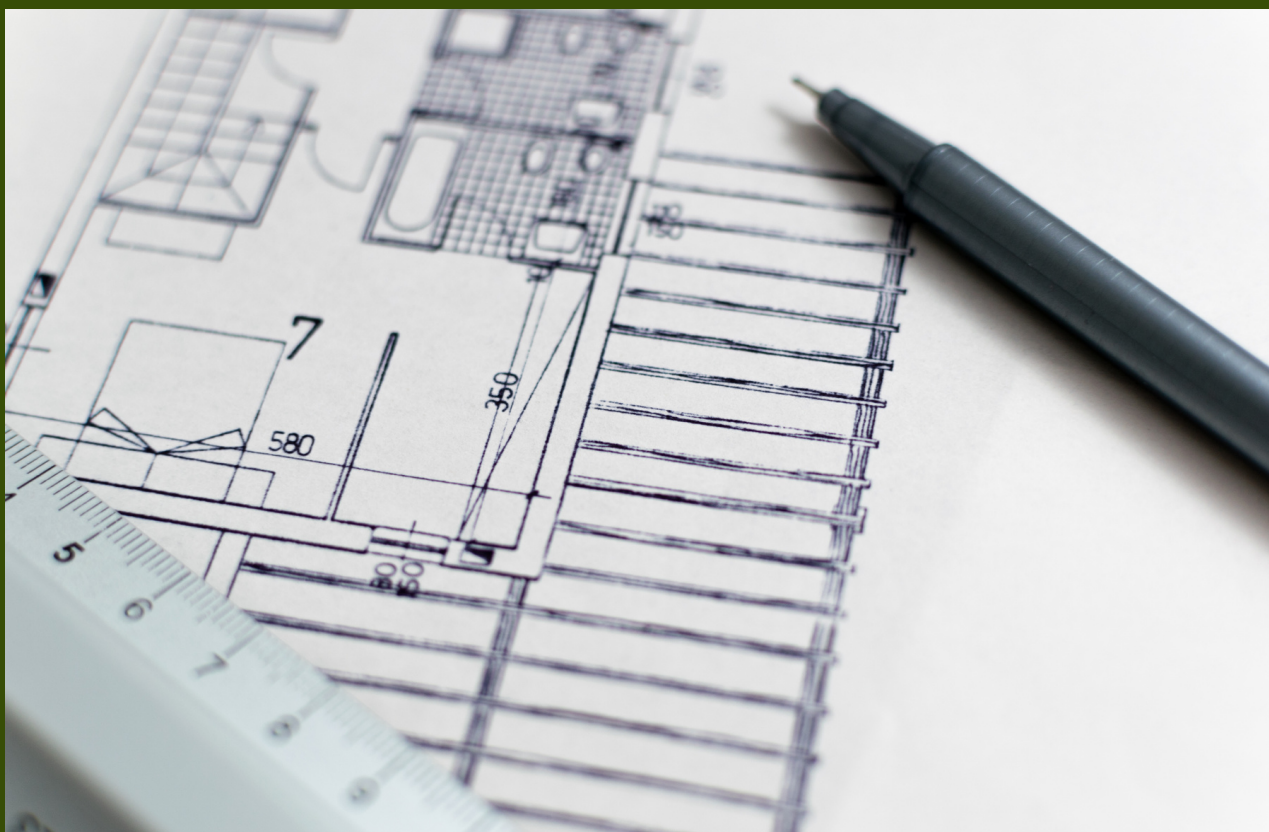
**Coordonator:**

NAGHI Elisabeta-Ana	Ministerul Educației
----------------------------	----------------------

Colectiv autori:

ANASTASE Florică	Liceul „Alexandru Odobescu”, Lehliu Gară, CL
AVRAMESCU Ana Nicoleta	Liceul Tehnologic „Matei Corvin”, Hunedoara, HD
BAIAȘ Alina-Ramona	Universitatea Tehnică Cluj-Napoca, CJ
BĂLĂNESCU Daniela	Inspectoratul Școlar Județean Constanța, CT
COSTEA Cristina	Liceul Tehnologic „Nicolae Dumitrescu”, Cumpăna, CT
CRUȚ Bianca	Liceul Tehnologic Economic de Turism, Iași, IS
DÂRSTARU Gheorghe	Colegiul Economic Buzău, BZ
DOBRICĂ-VĂSI Lavinia-Elena	Colegiul Tehnic de Arhitectură și Lucrări Publice „I. N. Socolescu”, București
GHERGHE Radu-Cătălin	Liceul Teoretic „Lucian Blaga”, București
HOFFMANN-BRONȚ Viorica-Cornelia	Liceul Tehnologic Special nr.1 , Oradea, BH
HOLHOȘ Viorel	Inspectoratul Școlar Județean Hunedoara, HD
IONESCU Corina-Mihaela	Colegiul Național „Barbu Știrbei”, Călărași CL
NEȚA Camelia-Elena	Școala Gimnazială nr. 2 Piatra-Neamț, NT
OPRIȘ Adonia-Augustina	Colegiul Tehnic „Alesandru Papiu Ilarian”, Zalău, SJ
PĂUN Alexandru	Colegiul Național „Neagoe Basarab”, Oltenița, CL
PETRE Monica	Liceul Teoretic „Ion Creangă”, Tulcea, TL
SIMON Roxana-Mirela	Liceul Tehnologic de Mecatronica și Automatizări, Iași, IS
ȘARGU Rodica	Liceul Tehnologic „Ion Bănescu”, Mangalia, CT
TEODORESCU Nicoleta	Colegiul Economic, Mangalia, CT
VĂCĂREȚU Ariana-Stanca	Colegiul Național „Emil Racoviță”, Cluj Napoca, CJ
VITCU Anca-Gabriela	Universitatea de Arhitectură și Urbanism "Ion Mincu", București
ZEFFER Timea-Erzsebet	Liceul Tehnologic nr. 1, Valea lui Mihai, BH

REPERE METODOLOGICE MATEMATICĂ 2023-2024



ÎNVĂȚĂMÂNT LICEAL
FILIERA TEORETICĂ, PROFIL UMANIST
FILIERA VOCAȚIONALĂ
CLASA a XI-a



CUPRINS

I. PREMISE PENTRU APLICAREA CURRICULUMULUI LA CLASA a XI-a ÎN ANUL ȘCOLAR 2023-2024	1
I.1. Recomandări generale privind specificul clasei a XI-a la disciplina matematică	1
I.2. Recomandări generale privind specificul învățământului liceal, filiera teretică, profilul umanist și filiera vocațională	1
I.3. Perspectiva examenului național de bacalaureat - Filiera vocațională, profilul pedagogic	2
II. ORIENTAREA PROCESULUI EDUCATIV LA DISCIPLINA MATEMATICĂ	3
II.1. Matematică - Programa 3, Filiera vocațională, profil artistic, Specializările Arhitectură, Arte ambientale, Design	3
II.1.1. Exemplu de planificare calendaristică anuală	3
II.1.2. Elemente de proiectare didactică – Exemplificare pentru unitatea de învățare „Elemente de geometrie în spațiu”	7
II.1.3. Test inițial	11
II.1.4. Lecția „Unghiuri în spațiu” - Exemplu de organizare a timpului didactic. Exemple de resurse	12
II.1.5. Test de evaluare sumativă unitatea de învățare „Elemente de geometrie în spațiu”	26
II.2. Matematică – Programa 4, Filiera vocațională, profil pedagogic, toate specializările, Filiera vocațională, profil sportiv, toate specializările	28
II.2.1. Exemplu de planificare calendaristică anuală	28
II.2.2. Elemente de proiectare didactică - Exemplificare pentru unitatea de învățare „Legi de compoziție”	31
II.2.3. Test inițial	34
II.2.4. Lecția „Proprietăți ale legilor de compoziție. Elemente simetrizabile” - Exemplu de organizare a timpului didactic. Exemple de resurse	36
II.2.5. Teste de evaluare sumativă - unitatea de învățare „Legi de compoziție”	40
II.3. Matematică - Programa 5, Filiera teoretică, profil umanist, Specializarea științe sociale, Filiera vocațională, profil militar M.A.I., Specializarea științe sociale, Filiera vocațională, profil teologic, toate specializările cu excepția specializărilor teologie ortodoxă și patrimoniu cultural	43
II.3.1. Exemplu de planificare calendaristică anuală	43
II.3.2. Elemente de proiectare didactică - Exemplificare pentru unitatea de învățare „Statistică”	46
II.3.3. Test inițial	52
II.3.4. Lecția „Date statistice” - Exemplu de organizare a timpului didactic. Exemple de resurse	53
II.3.5. Test de evaluare sumativă - Unitatea de învățare „Statistică”	56
III. COLECTIVUL DE AUTORI	58

I. PREMISE PENTRU APLICAREA CURRICULUMULUI LA CLASA a XI-a ÎN ANUL ȘCOLAR 2023-2024, ÎNVĂȚĂMÂNT LICEAL – FILIERĂ TEORETICĂ, PROFIL UMANIST, FILIERĂ VOCAȚIONALĂ

I.1 RECOMANDĂRI GENERALE PRIVIND SPECIFICUL CLASEI a XI-a LA DISCIPLINA MATEMATICĂ

Reperete metodologice pentru aplicarea curriculumului la clasa a XI-a, în anul școlar 2023-2024 vin în completarea *Reperelor metodologice pentru aplicarea curriculumului la clasa a X-a în anul școlar 2022-2023*, valabile pentru clasa a X-a și în acest an școlar, în vederea asigurării compatibilizării și a continuității la nivelul programelor școlare pentru liceu.

Generația de elevi care, începând cu 1 septembrie 2023, va fi în clasa a XI-a în anul școlar 2023-2024 este cea care a absolvit clasa a VIII-a la finalul anului școlar 2020-2021, fiind prima generație de elevi care a beneficiat de un nou curriculum național pentru învățământul primar (elaborat în anul 2013) și pentru învățământul gimnazial (elaborat în 2017).

Curriculumul de *Matematică* propune organizarea activității didactice pe baza corelării domeniilor de studiu, precum și utilizarea în practică în contexte variate a competențelor dobândite prin învățare.

Competențele în domeniul matematicii sunt definite drept capacitatea de a dezvolta și de a folosi gândirea și raționamentul matematic pentru a rezolva o serie de probleme în situații întâlnite în viața de zi cu zi. Se pune accent atât pe procese și activități, cât și pe cunoștințe. Competențele matematice implică, la niveluri diferite, capacitatea și disponibilitatea de a utiliza gândirea logică și analitică și algoritmi de prezentare (formule, modele, grafice, diagrame).

Pentru anul școlar 2023-2024, procesul de predare-învățare-evaluare pentru clasa a XI-a se raportează la:

- programele școlare în vigoare pentru disciplina matematică (M1 – M5), **Anexa 2 la O.M.E.C. nr. 3252/13.02.2006**
- planurile-cadru în vigoare, aprobate prin **O.M.E.C.I. nr. 3410, 3411, 3412 din 16.03.2009** și **O.M.E.C.T.S. nr. 5347/7.09.2011**
- structura anului școlar 2023-2024, aprobată prin **O.M.E. nr. 3800/9.03.2023**

I.2 RECOMANDĂRI GENERALE PRIVIND SPECIFICUL ÎNVĂȚĂMÂNTULUI LICEAL, FILIERA TERETICĂ, PROFILUL UMANIST ȘI FILIERA VOCAȚIONALĂ

Disciplina *Matematică* pentru clasa a XI-a continuă, în funcție de specificul filierei, profilurilor și specializărilor, studiul matematicii din clasele a IX-a și a X-a.

Programa disciplinei matematică pentru clasa a XI-a este defalcată în cinci categorii, M1-M5, după numărul și tipul orelor alocate acestei discipline prin planurile-cadru și vizează diferite competențe generale și competențe specifice care se integrează și contribuie atât la formarea culturii de specialitate în domeniul specializării cât și la formarea profilului absolventului, în funcție de filieră și specializare.

În procesul de predare-învățare-evaluare a matematicii la clasele de la filiera *vocațională*, profilul *artistic* (specializările Arhitectură, Arte ambientale, Design), profilul *pedagogic*, toate specializările, profilul *sportiv*, toate specializările, profilul *teologic*, toate specializările, cu excepția specializărilor teologie ortodoxă și patrimoniu cultural, profilul *militar* M.A.I., (specializarea științe sociale) și filiera *teoretică*, profilul *umanist* (specializarea științe sociale) se vor avea în vedere:

- esențializarea conținuturilor în scopul accentuării laturii formative;
- compatibilizarea cunoștințelor cu vârsta elevului și cu experiența anterioară a acestuia;

- continuitatea și coerența intradisciplinară;
- realizarea legăturilor interdisciplinare prin crearea de modele matematice ale unor fenomene abordate în cadrul altor discipline;
- prezentarea conținuturilor într-o formă accesibilă, cu scopul de a stimula motivația pentru studiul matematicii;
- asigurarea unei continuități la nivelul experienței didactice acumulate în predarea matematicii în sistemul nostru de învățământ.

Având în vedere numărul mic de ore asociat disciplinei matematica în ciclul liceal superior pentru filiera *vocațională*, profilul *artistic* (specializările Arhitectură, Arte ambientale, Design), profilul *pedagogic*, toate specializările, profilul *sportiv*, toate specializările, profilul *teologic*, toate specializările, cu excepția specializărilor teologie ortodoxă și patrimoniu cultural, profilul *militar* M.A.I., (specializarea științe sociale) și filiera *teoretică*, profilul *umanist* (specializarea științe sociale), profesorul va trebui să prezinte conținuturile aferente programelor cât mai atrăgător și cât mai pe înțelesul elevilor utilizând metode și mijloace didactice atractive. De asemenea, trebuie avut în vedere că o parte dintre acești elevi vor continua în învățământul superior studiul matematicii. Astfel, conținuturile asociate fiecărei programe se pot utiliza în contexte practice în diverse domenii de activitate:

- teoria grafurilor are diverse aplicații în domenii cum ar fi: economie, chimie, informatică, organizare, psihologie și chiar în anumite domenii artistice;
- conținuturile asociate geometriei în spațiu sunt utile în arhitectură, fizică, inginerie, design industrial și informatică;
- statistica este utilă într-o varietate de domenii precum economie, știință, medicină și sociologie, pentru a analiza și interpreta datele;
- elementele de analiză matematică sunt utile într-o gamă largă de domenii științifice și aplicate oferind instrumente pentru înțelegerea proprietăților funcțiilor, a legilor fizicii, a conceptelor economice, a proceselor biologice;
- în domeniul informaticii, analiza matematică este esențială pentru dezvoltarea algoritmilor și a inteligenței artificiale.

I.3 PERSPECTIVA EXAMENULUI NAȚIONAL DE BACALAUREAT – FILIERA VOCAȚIONALĂ, PROFILUL PEDAGOGIC

Examenul național de bacalaureat este modalitatea de evaluare a gradului de formare și dezvoltare a competențelor absolvenților de liceu la discipline de studiu specifice filierei, profilului și specializării absolvite. În cadrul filierei vocaționale, doar elevii de la profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare, susțin la sfârșitul clasei a XII-a probă scrisă la disciplina matematică.

Planul-cadru pentru acest profil și această specializare prevede o singură oră de matematică pe săptămână. Dintre cele două domenii de conținut prevăzute în programa de matematică M4 pentru clasa a XI-a, doar „Structurile algebrice” sunt în programa de bacalaureat.

În vederea pregătirii pentru promovarea cu succes a examenului de bacalaureat, profesorii și elevii pot utiliza atât testele de antrenament publicate de Ministerul Educației, prin CNPEE, pe <https://www.rocnee.eu>, cât și modelele și variantele de subiecte publicate pe site-ul www.subiecte.edu.ro

Utilizarea resurselor digitale și a tehnologiilor în cadrul orelor de matematică este benefică deoarece crește atractivitatea activităților didactice, sporind interesul și motivația pentru studiul acestei discipline în rândul elevilor. De asemenea, cu ajutorul aplicațiilor digitale, profesorii pot realiza evaluări putând oferi elevilor feedback rapid și personalizat.

II. ORIENTAREA PROCESULUI EDUCATIV LA DISCIPLINA MATEMATICĂ

II.1 MATEMATICĂ - PROGRAMĂ 3_Filiera vocațională, profil artistic_Specializările Arhitectură, Arte ambientale, Design

II.1.1. EXEMPLU DE PLANIFICARE CALENDARISTICĂ ANUALĂ

Unitatea de învățământ:

PLANIFICARE CALENDARISTICĂ ANUALĂ ANUL ȘCOLAR 2023 – 2024*

Matematică

Clasa a XI-a (Arhitectură/Arte ambientale/Design)

2 ore/săptămână

Unități de învățare	Competențe specifice	Conținuturi	Număr de ore alocate	Săptămâna	Observații/ Modulul
[se menționează titluri/teme]	[se precizează numărul criterial al competențelor specifice din programa școlară]	[din conținuturile programei școlare]	[stabilite de către cadrul didactic]	[se precizează săptămâna sau săptămânile]	[se menționează, de exemplu, modificări în urma realizării activității didactice la clasă]
Recapitulare inițială	CS vizate de programa școlară a clasei a X-a	<i>Recapitulare – clasa a X-a</i> <i>Evaluare inițială</i> <i>Activități remediale și/sau de progres</i>	2	S1	Modulul 1
Elemente de geometrie în spațiu	1.1 2.1 3.1 4.1 5.1	<ul style="list-style-type: none"> Pozițiile relative ale dreptelor și planelor în spațiu Unghiuri în spațiu: unghiul a două drepte în spațiu, unghiul dintre o dreaptă și un plan, unghiul dintre două plane Drepte și plane perpendiculare: proiecția unui punct pe un plan, proiecția unei drepte pe un plan, proiecția unei figuri geometrice pe un plan, perpendiculara comună a două drepte necoplanare 	4	S2-S3	
Corpuri geometrice, secțiuni, distanțe, arii și volume	1.1 2.1 3.1	<ul style="list-style-type: none"> Corpuri geometrice: poliedre (suprafețe prismatice, suprafețe piramidale, mulțimi poliedrale, poliedere particulare, relația lui Euler) și corpuri rotunde 			

Unități de învățare	Competențe specifice	Conținuturi	Număr de ore alocate	Săptămâna	Observații/ Modulul
	4.1 5.1	(suprafața cilindrică, suprafața conică, cilindrul, con, sferă, corpurile de rotație) <ul style="list-style-type: none"> • Secțiuni plane în corpurile geometrice • Calcule de distanțe în spațiu, calcule de arii și volume (principiul lui Cavalieri) • Reper cartezian în spațiu, coordonatele unui punct în spațiu, calculul distanței dintre două puncte date 	6	S4-S6	
Școala Altfel (23 – 27.10.2023)				S7	
Vacanță (28.10.2023 – 5.11.2023)					
Limite de funcții	1.2 2.2 3.2 4.2 5.2	<ul style="list-style-type: none"> • Noțiuni elementare despre mulțimi de puncte pe dreapta reală: intervale, mărginire, vecinătăți, dreapta încheiată, simbolurile $+\infty$ și $-\infty$ • Limite de funcții: interpretarea grafică a limitei într-un punct, utilizând vecinătăți, limite laterale pentru: funcția de gradul I, funcția de gradul al II-lea, funcția logaritmică, exponențială, funcția putere ($n = 2, 3$), funcția radical ($n = 2, 3$), funcția raport de două funcții cu grad cel mult 2 	6	S8 - S10	Modulul 2
Calcul de limite de funcții. Aplicații - asimptote	1.2 2.2 3.2 4.2 5.2	<ul style="list-style-type: none"> • Calculul limitelor pentru funcția de gradul I, funcția de gradul al II-lea, funcția logaritmică, exponențială, funcția putere ($n = 2, 3$), funcția radical ($n = 2, 3$), funcția raport de două funcții cu grad cel mult 2 • Cazuri exceptate la calculul limitelor de funcții $\left(\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty\right)$ Asimptotele graficului funcțiilor studiate: verticale, orizontale și oblice 	8	S11-S14	
Vacanță (23.12.2023 – 07.01.2024)					

Unități de învățare	Competențe specifice	Conținuturi	Număr de ore alocate	Săptămâna	Observații/ Modulul
Funcții continue	1.2 2.2 3.2 4.2 5.2	<ul style="list-style-type: none"> Interpretarea grafică a continuității unei funcții, operații cu funcții continue Semnul unei funcții continue pe un interval de numere reale 	6	S15 – S17	Modulul 3
Funcții derivabile	1.2 2.2 3.2 4.2 5.2	<ul style="list-style-type: none"> Tangenta la o curbă Derivata unei funcții într-un punct, funcții derivabile 	8	S18 - S21	
Vacanță** (24.02.2024 – 03.03.2024)					
Operații cu funcții derivabile	1.2 2.2 3.2 4.2 5.2	<ul style="list-style-type: none"> Operații cu funcții care admit derivată, calculul derivatei de ordinul I pentru funcția de gradul I, funcția de gradul al II-lea, funcția logaritmică, exponențială, funcția putere ($n = 2, 3$), funcția radical ($n = 2, 3$), funcția raport de două funcții cu grad cel mult 2 	8	S22 – S25	Modulul 4
Studiul funcțiilor cu ajutorul derivatelor	1.2 2.2 3.2 4.2 5.2	<ul style="list-style-type: none"> Rolul derivatei de ordinul I în studiul funcțiilor: monotonie, puncte de extrem 	6	S26 – S28	
Săptămâna verde*** (22 – 26.04.2024)				S29	
Vacanță (27.04.2024 - 07.05.2024)					
Reprezentarea grafică a funcțiilor	1.2 2.2 3.2 4.2 5.2	<ul style="list-style-type: none"> Reprezentarea grafică a funcțiilor studiate 	8	S30 - S33	Modulul 5

Unități de învățare	Competențe specifice	Conținuturi	Număr de ore alocate	Săptămâna	Observații/ Modulul
Recapitulare și sistematizare	CS vizate de programa școlară pentru clasa a XI-a	<ul style="list-style-type: none"> Elemente de geometrie în spațiu Elemente de analiză matematică 	6	S34 - S36	

*Planificarea calendaristică este realizată pentru anul școlar 2023 – 2024, care, pentru clasa a XI-a, are 36 de săptămâni de cursuri (OME nr. 3800/9.03.2023).

**Structura anului școlar 2023 - 2024 prevede o vacanță de o săptămână, în perioada 12 februarie – 3 martie 2024, la decizia inspectoratelor școlare județene/al municipiului București. În exemplul de planificare prezentat, această vacanță este stabilită în perioada 24 februarie – 3 martie 2024.

*** Programul național „Școala Altfel” și Programul „Săptămâna verde” se desfășoară în perioada 11 septembrie 2023—26 aprilie 2024, în intervale de câte 5 zile consecutive lucrătoare, a căror planificare se află la decizia unității de învățământ. Derularea celor două programe se planifică în intervale de cursuri diferite.

Competențele specifice (CS) din planificare sunt de forma $n.m$, unde $n = \overline{1,5}$ corespunde numerotării competențelor generale din programa școlară și $m = \overline{1,2}$ corespunde conținuturilor din programa școlară, astfel:

$m = 1$ pentru *Elemente de geometrie în spațiu*

$m = 2$ pentru *Elemente de analiză matematică*

Planificarea este realizată pentru următoarea structură a anului școlar:

Modulul	Perioada	Săptămânile de școală							
		1	2	3	4	5	6	7	8
Modulul 1	11 septembrie – 27 octombrie 2023 (6 săptămâni + Școala Altfel_S7)	1	2	3	4	5	6	7	
Modulul 2	6 noiembrie – 22 decembrie 2023 (7 săptămâni)	8	9	10	11	12	13	14	
Modulul 3	8 ianuarie – 23 februarie 2024 (7 săptămâni)	15	16	17	18	19	20	21	
Modulul 4	4 martie – 26 aprilie 2024 (7 săptămâni + Săptămâna Verde_S29)	22	23	24	25	26	27	28	29
Modulul 5	8 mai – 21 iunie 2024 (7 săptămâni)	30	31	32	33	34	35	36	

II.1.2. ELEMENTE DE PROIECTARE DIDACTICĂ – EXEMPLIFICARE PENTRU UNITATEA DE ÎNVĂȚARE „ELEMENTE DE GEOMETRIE ÎN SPAȚIU”

DOMENIUL DE CONȚINUT	GEOMETRIE				
UNITATE DE ÎNVĂȚARE	ELEMENTE DE GEOMETRIE ÎN SPAȚIU				
Nr. ore alocate	4				
TITLUL LECȚIEI	CONȚINUTURI	COMPETENȚE SPECIFICE	ACTIVITĂȚI DE ÎNVĂȚARE	RESURSE	EVALUARE
Drepte și plane în spațiu	Pozițiile relative ale dreptelor și planelor în spațiu	1.1 2.1 3.1 4.1 5.1	<p>A1. Identificarea, construcția, notarea și citirea unor drepte concurente/paralele/necoplanare în configurații spațiale, cu exemplificare în realitatea înconjurătoare.</p> <p>A2. Identificarea, în configurații spațiale simple și în realitate, a pozițiilor relative ale unei drepte față de un plan.</p> <p>A3. Identificarea pozițiilor relative a două plane în configurații spațiale simple și în realitatea înconjurătoare.</p> <p>A4. Reprezentarea prin desen sau prin modele a unor configurații spațiale în/din contexte reale.</p> <p>A5. Utilizarea instrumentelor geometrice și a softurilor matematice pentru a desena diferite configurații spațiale.</p> <p>A6. Verificarea validității unor afirmații legate de pozițiile relative ale dreptelor și/sau ale planelor prin exemple și contraexemple.</p>	<p>Resurse procedurale: conversația, explicația, demonstrația, exercițiul, rezolvarea de probleme.</p> <p>Resurse materiale: manual, tablă, auxiliare, laptop/telefon, videoproiector, fișă de lucru.</p> <p>Resurse web: GeoGebra; Google forms; Quizizz; Eduboom.</p> <p><i>Exemplu:</i></p> <p>https://quizizz.com/admin/quiz/64e18a8b5cf5300008370f69?source=quiz_share</p>	<p>Forme de evaluare: evaluare frontală, evaluare asistată de calculator.</p> <p>Metode de evaluare: conversația, explicația, observarea sistematică a activității și comportamentului elevului, rezolvarea de probleme, autoevaluarea.</p> <p>Instrumente de evaluare: fișe de lucru, seturi de întrebări structurate, chestionare.</p>

			A7. Analiza datelor și optimizarea rezolvării de probleme prin utilizarea instrumentelor interactive de realizare a reprezentărilor geometrice (softuri matematice).		
Drepte și plane perpendiculare	<p>Proiecția unui punct pe un plan</p> <p>Proiecția unei drepte pe un plan</p> <p>Proiecția unei figuri geometrice pe un plan</p> <p>Perpendiculara comună a două drepte necoplanare</p>	<p>1.1</p> <p>2.1</p> <p>3.1</p> <p>4.1</p> <p>5.1</p>	<p>A1. Identificarea proiecțiilor unui punct/unei drepte/unei figuri geometrice pe un plan în configurații geometrice date.</p> <p>A2. Reprezentarea, prin desen, a proiecțiilor și a unghiurilor.</p> <p>A3. Determinarea perpendicularității în spațiu, între drepte și/sau plane cu ajutorul proprietăților relațiilor de paralelism și de perpendicularitate în configurații simple.</p> <p>A4. Determinarea lungimii proiecției unui segment pe o dreaptă sau pe un plan.</p> <p>A5. Construirea unor configurații geometrice cu drepte și plane aflate în relații de paralelism sau perpendicularitate.</p>	<p>Resurse procedurale: conversația, explicația, demonstrația, exercițiul, rezolvarea de probleme.</p> <p>Resurse materiale: manual, tablă, auxiliare, laptop/telefon, videoproiector, fișă de lucru.</p> <p>Resurse web: GeoGebra; Google forms; Quizizz; Eduboom, LearningApps.</p> <p><i>Exemplu:</i> https://www.geogebra.org/m/wy5e84rr</p>	<p>Forme de evaluare: evaluare frontală, evaluare asistată de calculator.</p> <p>Metode de evaluare: conversația, explicația, observarea sistematică a activității și comportamentului elevului, rezolvarea de probleme, autoevaluarea.</p> <p>Instrumente de evaluare: fișe de lucru, seturi de întrebări structurate, chestionare.</p>
Unghiuri în spațiu	<p>Unghiul a două drepte în spațiu</p> <p>Unghiul dintre o dreaptă și un plan</p> <p>Unghiul dintre două plane</p>	<p>1.1</p> <p>2.1</p> <p>3.1</p> <p>4.1</p> <p>5.1</p>	<p>A1. Reprezentarea prin desen sau prin modele a unor configurații spațiale în/din contexte reale.</p> <p>A2. Utilizarea instrumentelor geometrice și a softurilor matematice pentru a desena diferite configurații spațiale.</p> <p>A3. Determinarea măsurii unghiului dintre două drepte în spațiu.</p>	<p>Resurse procedurale: conversația, explicația, demonstrația, exercițiul, rezolvarea de probleme.</p> <p>Resurse materiale: manual, tablă, auxiliare, laptop/telefon, videoproiector, fișă de</p>	<p>Forme de evaluare: evaluare frontală, evaluare asistată de calculator.</p> <p>Metode de evaluare: conversația, explicația, observarea sistematică a activității și</p>

			<p>A4. Determinarea măsurii unghiului dintre o dreaptă și un plan.</p> <p>A5. Determinarea măsurii unghiului dintre două plane.</p> <p>A6. Utilizarea proprietăților corpurilor geometrice pentru determinarea măsurilor unghiurilor în spațiu.</p> <p>A7. Utilizarea reprezentărilor geometrice pentru determinarea măsurilor unghiurilor și a distanțelor în vederea stabilirii pozițiilor relative ale dreptelor și/sau planelor în spațiu.</p>	<p>lucru.</p> <p>Resurse web: GeoGebra; Google forms; Quizizz; Eduboom, Liveworksheets.</p> <p><i>Exemplu:</i> https://www.geogebra.org/m/PKcgsdMY</p>	<p>comportamentului elevului, rezolvarea de probleme, studiu de caz, autoevaluarea.</p> <p>Instrumente de evaluare: fișe de lucru, seturi de întrebări structurate, chestionare.</p>
Unghiuri în spațiu	<p>Unghiul a două drepte în spațiu</p> <p>Unghiul dintre o dreaptă și un plan</p> <p>Unghiul dintre două plane</p>	<p>1.1</p> <p>2.1</p> <p>3.1</p> <p>4.1</p> <p>5.1</p>	<p>A1. Reprezentarea prin desen sau prin modele a unor configurații spațiale în/din contexte reale.</p> <p>A2. Utilizarea instrumentelor geometrice și a softurilor matematice pentru a desena diferite configurații spațiale.</p> <p>A3. Determinarea măsurii unghiului dintre două drepte în spațiu.</p> <p>A4. Determinarea măsurii unghiului dintre o dreaptă și un plan.</p> <p>A5. Determinarea măsurii unghiului dintre două plane.</p> <p>A6. Utilizarea proprietăților corpurilor geometrice pentru determinarea măsurilor unghiurilor în spațiu.</p> <p>A7. Utilizarea reprezentărilor geometrice pentru determinarea măsurilor unghiurilor și a distanțelor în vederea stabilirii pozițiilor relative ale dreptelor și/sau planelor în spațiu.</p>	<p>Resurse procedurale: conversația, explicația, demonstrația, exercițiul, rezolvarea de probleme.</p> <p>Resurse materiale: manual, tablă, auxiliare, laptop/telefon, videoproiector, fișă de lucru.</p> <p>Resurse web: GeoGebra; Google forms; Quizizz; Eduboom, Liveworksheets.</p> <p><i>Exemplu:</i> https://www.geogebra.org/m/PKcgsdMY</p>	<p>Forme de evaluare: evaluare frontală, evaluare asistată de calculator.</p> <p>Metode de evaluare: conversația, explicația, observarea sistematică a activității și comportamentului elevului, rezolvarea de probleme, studiu de caz, autoevaluarea.</p> <p>Instrumente de evaluare: fișe de lucru, seturi de întrebări structurate, chestionare.</p>

Aplicații și evaluare		1.1 2.1 3.1 4.1 5.1	<p>A1. Realizarea reprezentărilor configurațiilor spațiale respectând cerințele problemelor în vederea optimizării rezolvării acestora.</p> <p>A2. Verificarea validității unor rezultate utilizând configurații geometrice realizate cu ajutorul softurilor.</p> <p>A3. Formularea de ipoteze și de concluzii în probleme cu conținut practic legate de proiecții pe plan a unor puncte, drepte, segmente.</p> <p>A4. Analizarea/interpretarea unor situații din realitatea înconjurătoare și transpunerea lor în probleme de geometrie în spațiu.</p> <p>A5. Transpunerea unor situații date în limbajul specific geometriei, interpretarea rezultatelor obținute și corelarea răspunsului geometric cu restricțiile impuse de realitatea înconjurătoare.</p> <p>A6. Argumentarea demersului de rezolvare a unei probleme de geometrie în spațiu.</p>	<p>Resurse procedurale: conversația, explicația, demonstrația, exercițiul, rezolvarea de probleme.</p> <p>Resurse materiale: manual, tablă, auxiliare, laptop/telefon, videoproiector, fișă de lucru.</p> <p>Resurse web: GeoGebra; Google forms; Quizizz; Eduboom, Liveworksheets.</p> <p><i>Exemplu:</i> https://www.liveworksheets.com/w/ro/matematica/226276</p>	<p>Forme de evaluare: evaluare frontală, evaluare scrisă, evaluare asistată de calculator;</p> <p>Metode de evaluare: conversația, explicația, observarea sistematică a activității și comportamentului elevului, rezolvarea de probleme, autoevaluarea.</p> <p>Instrumente de evaluare: fișe de lucru sau fișe de lucru individualizate, teste de evaluare etc.</p>
-----------------------	--	---------------------------------	---	---	---

Competențe specifice

CS 1.1. Identificarea unghiurilor, pozițiilor relative ale dreptelor și planelor în spațiu pe corpuri geometrice care pot ilustra spații arhitecturale

CS 2.1. Reprezentarea în spațiu a corpurilor geometrice, punând în evidență elementele care le determină

CS 3.1. Utilizarea proprietăților corpurilor geometrice pentru construcții în spațiu și pentru identificarea unor relații între elemente ale corpurilor geometrice

CS 4.1. Utilizarea convențiilor de notație și de reprezentare specifice geometriei în spațiu

CS 5.1. Utilizarea reprezentărilor geometrice pentru rezolvarea unor probleme referitoare la secțiuni plane în corpuri geometrice, la tangența a corpurilor de rotație și la corpuri geometrice înscrise sau circumscrise

II.1.3. TEST INIȚIAL

TEST INIȚIAL CLASA a XI-a

- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 30 de minute.

Încercuți litera corespunzătoare răspunsului corect.

(10p) 1. Soluția reală a ecuației $\sqrt{2x+5} = x+1$ este:

- A. -2 B. 1 C. 2 D. 4

(10p) 2. Soluția reală a ecuației $\log_2(x+1) = 2$ este:

- A. 3 B. 2 C. 1 D. 0

(10p) 3. Numărul submulțimilor ordonate cu două elemente ale unei mulțimi cu 15 elemente este egal cu:

- A. 210 B. 105 C. 15 D. 2

(15p) 4. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2,0)$, $B(0,5)$ și $C(4,0)$. Aria triunghiului ABC este egală cu:

- A. 20 B. 15 C. 10 D. 5

(15p) 5. Ecuația dreptei care trece prin punctul $A(1,2)$ și este paralelă cu dreapta de ecuație $y = x + 5$ este:

- A. $y = x$ B. $y = -x + 1$ C. $y = x + 1$ D. $y = x - 1$

(15p) 6. Probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă produsul cifrelor egal cu 12 este:

- A. $\frac{2}{45}$ B. $\frac{1}{45}$ C. $\frac{1}{15}$ D. $\frac{5}{90}$

(15p) 7. După o scumpire cu 30% prețul unui obiect este de 260 de lei. Prețul inițial al obiectului a fost egal cu:

- A. 182 de lei B. 200 de lei C. 220 de lei D. 290 de lei

Varianta online: <https://forms.gle/r8JALejrAS9rTnMP8>

Barem de evaluare și de notare

- Se acordă zece puncte din oficiu.
- Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare
- Nu se acordă punctaje intermediare

1	C	10 p
2	A	10 p
3	A	10 p
4	B	15 p
5	C	15 p
6	A	15 p
7	B	15 p

II.1.4. LECȚIA „UNGHURI ÎN SPAȚIU” - EXEMPLU DE ORGANIZARE A TIMPULUI DIDACTIC. EXEMPLE DE RESURSE.

Timp didactic	Componentă	Observații	Profesor	Elev	Resurse	Organizarea activității
2 minute	Moment organizatoric	Sunt asigurate condițiile optime pentru desfășurarea activității.	Profesorul postează pe platforma de <i>e-learning</i> materialele didactice, în vederea eficientizării accesului elevilor, pe tot parcursul lecției.	Elevii se conectează la platforma de <i>e-learning</i> .	Platformă de <i>e-learning</i>	individual
5 minute	Reactualizarea cunoștințelor învățate anterior și a deprinderilor	Se creează o bază pentru dezvoltarea unor structuri cognitive noi, prin actualizarea unor cunoștințe semnificative, relevante pentru demersul didactic actual.	Profesorul propune completarea fișei de lucru nr.1- liveworksheets. Se analizează și se furnizează feedback privind rezultatele obținute, în vederea corectării eventualelor erori din ansamblul informațional al elevului.	Elevii, în grupe de câte doi, completează fișa de lucru nr. 1. Reflectează asupra rezultatelor obținute în baza grilei de notare. Formulează/ notează idei și concluzii care sprijină propria învățare.	Calculator/telefon/videoproiector <i>Fișa de lucru nr.1</i> - https://www.liveworksheets.com/c?a=c&sr=n&im=n&l=wh&i=sutfsou&r=de&f=dzdtodz&ms=uz&cd=klluwpzjepjxnrngzgjngxg&mw=hs	grupe frontal
3 minute	Captarea atenției elevilor	Se urmărește motivarea elevului, stimulându-i interesele de cunoaștere.	Profesorul propune o scurtă prezentare în vederea exersării obișnuinței de a recurge la modele matematice în abordarea unor situații cotidiene sau pentru rezolvarea unor probleme practice.	Elevii urmăresc prezentarea	Calculator/videoproiector <i>Prezentare</i> https://manuale.edu.ro/manuale/Clasa%20a%20VIII-a/Matematica/Uy5DLiBHUIVQIEVESVRP/ (Linț, D, Linț, M, Birta, A,C., Noaghi S.D., Zaharia, D., Zaharia, M., 2020, Manual de	

					matematică pentru clasa a VIII-a, Editura Litera, pag. 178)	
17 minute	Prezentarea optimă a conținutului și dirijarea învățării	Este anunțat subiectul lecției, precum și performanțele pe care elevii urmează să le atingă.	Ținând cont de potențialul cognitiv al elevilor, profesorul îi îndrumă pe elevi și îi antrenează în activitățile de învățare, cu ajutorul prezentării PowerPoint.	Elevii urmăresc prezentarea, notează în caiete și răspund întrebărilor adresate de profesor.	Calculator/videoproiector <i>Prezentare PowerPoint - Anexa nr.1</i>	frontal
12 minute	Obținerea performanței	Activitățile diferențiate de învățare sunt parcurse gradual din punct de vedere al complexității, în funcție de particularitățile individuale de învățare.	Profesorul propune elevilor spre rezolvare fișa de lucru nr. 2. În vederea formării/dezvoltării competențelor vizate.	Elevii rezolvă sarcinile de lucru propuse.	Tabla <i>Fișa de lucru nr. 2 –obținerea performanței</i>	individual frontal
8 minute	Asigurarea feedback-ului și evaluarea performanței	Crearea unui mediu sigur, în vederea determinării nivelului actual de performanță raportat la obiective, în care eventualele greșelile sunt privite ca	În vederea constatării nivelului de performanță atins de către elevi, profesorul solicită elevilor completarea formularului Google-fișa de lucru nr. 3. În urma analizării raportului generat de formular, profesorul prezintă elevilor rezolvările corecte ale	Elevii completează formularul, se autoevaluează și urmăresc explicațiile profesorului, notându-și observațiile în caiete.	Calculator/telefon/videoproiector <i>Fișa de lucru nr. 3- Google forms, asigurarea feedback-ului și evaluarea performanței</i> https://forms.gle/jtT1WWwzzhZmowPY8	individual frontal

		oportunități de învățare.	itemilor, insistând asupra greșelilor frecvente			
2 minute	Asigurarea retenției și a transferului	Tema pentru acasă	Profesorul precizează tema pentru acasă – fișa de lucru nr. 4 și oferă explicații pentru continuarea învățării și pentru asigurarea operării cu noile cunoștințe în contexte variate.	Elevii primesc fișa și urmăresc explicațiile în vederea operării în contexte noi, cu setul de achiziții realizat.	<i>Fișa de lucru nr. 4 – tema pentru acasă</i>	frontal
1 minut	Aprecieri și recomandări	Este apreciată individual și general activitatea și gradul de implicare a elevilor în sarcinile de lucru propuse.	Se recomandă elevilor consolidarea competențelor formate, utilizând culegeri și fișe de lucru transmise de profesor.	Elevii recepționează aprecierile și recomandările		frontal

FIȘA DE LUCRU NR. 1 – REACTUALIZAREA CUNOȘTINȚELOR

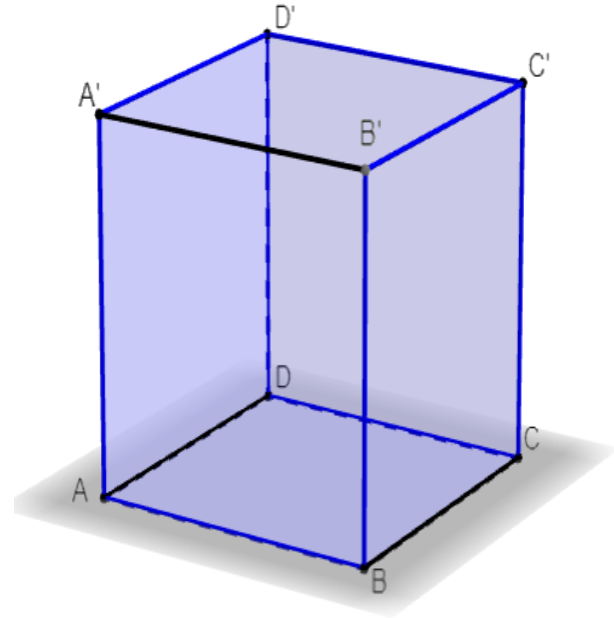
Fișa poate fi accesată online la adresa:

<https://www.liveworksheets.com/c?a=c&sr=n&im=n&l=wh&i=sutfsou&r=de&f=dzdtzodz&ms=uz&cd=klluwxpezjxnrrngnzgjnngxg&mw=hs>

În figura alăturată, $ABCD A' B' C' D'$ este o prismă patrulateră regulată dreaptă.

1. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor următoare, selectând A pentru un enunț adevărat și F pentru un enunț fals:

- a) $A'D' \parallel DC$
- b) $A'D' \parallel BC$
- c) $A'D' \parallel (BCC')$
- d) $A'D' \subset (ADA')$
- e) $(AD'B') \parallel (ABC)$
- f) $(ABC) \cap (AA'B') = \{A\}$

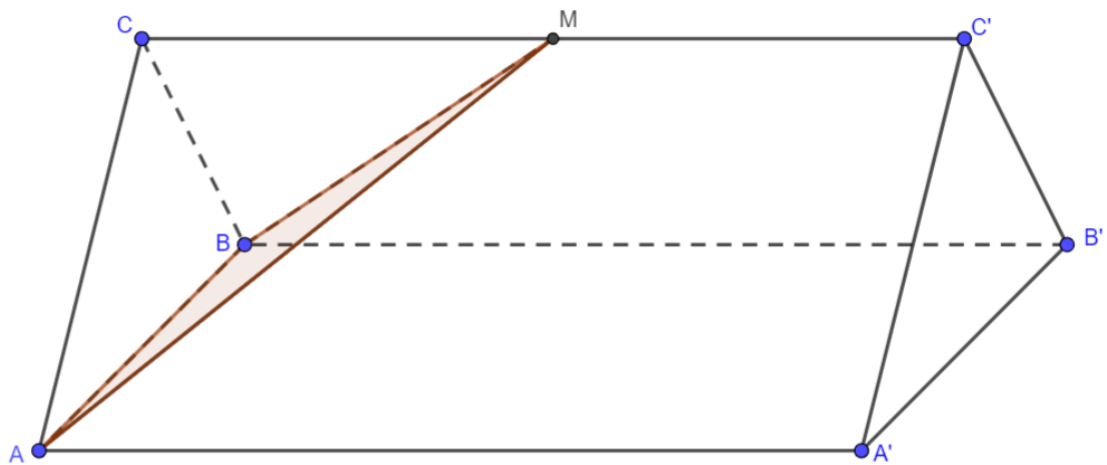


2. Asociați proiecțiile ortogonale, precizate în coloana A, cu punctele și dreptele corespunzătoare, indicate în coloana B, pentru a obține propoziții adevărate:

A	B
$pr_{(ABC)}A'$	BC'
$pr_{(BCC')}BA'$	B
$pr_{(BCC')}BD'$	BB'
$pr_{(BCC')}BA$	BC
	A

FIȘA DE LUCRU NR. 2 – OBTINEREA PERFORMANȚEI

1. În figura de mai jos este reprezentată prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ cu $AB = 6\text{cm}$ și $AA' = 12\text{cm}$. Punctul M este mijlocul muchiei CC' .
- Determină măsura unghiului dreptelor AB și $B'C'$.
 - Determină măsura unghiului dreptelor AB și CC' .
 - Determină măsura unghiului format de dreapta CC' și planul (ABB') .
 - Arată că măsura unghiului format de dreapta AC și planul (ABB') este de 60° .
 - Verifică dacă măsura unghiului format de planele $(CC'B')$ și (ABB') este egală cu 30° .
 - Calculează sinusul unghiului format de planele (AMB) și (ABC) .



FIȘA DE LUCRU NR. 3 – GOOGLE FORMS, ASIGURAREA FEEDBACK-ULUI ȘI EVALUAREA PERFORMANȚEI

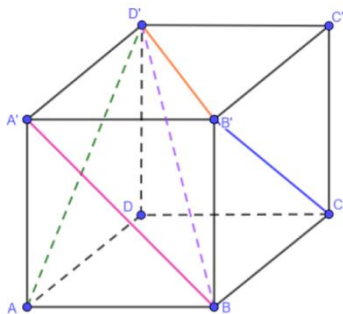
Fișa poate fi accesată online la adresa: <https://forms.gle/jtT1WWwzzhZmowPY8>

Pentru fiecare răspuns se acordă fie 15 puncte, fie 0 puncte. Nu se acordă punctaje intermediare.

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Timpul de lucru efectiv este de 7 minute.

În figura de mai jos este reprezentat cubul $ABCD A' B' C' D'$.



- Măsura unghiului format de dreptele $B'C$ și $A'D'$ este egală cu 45° .
 - Adevărat
 - Fals
- Măsura unghiului format de dreptele $D'B'$ și $A'B$ este egală cu:
 - 30°
 - 45°
 - 60°
 - 90°
- Măsura unghiului format de dreapta AD' cu planul $(A'B'C')$ este egală cu 60° .
 - Adevărat
 - Fals
- Tangenta unghiului format de dreapta $D'B$ și planul (ABC) este egală cu:
 - $\frac{\sqrt{2}}{2}$
 - 1
 - $\frac{\sqrt{3}}{3}$
 - $\sqrt{3}$
- Determină măsura unghiului format de planele $(A'B'C')$ și (CDD') și completează răspunsul obținut în spațiul de mai jos.

- Calculează tangenta unghiului format de planele $(AD'C)$ și (ABC) și completează răspunsul obținut în spațiul de mai jos.

FIȘA DE LUCRU NR. 4 – TEMA PENTRU ACASĂ

1. În figura 1, prisma patrulateră regulată dreaptă $ABCD A' B' C' D'$ reprezintă schematic un suport pentru umbrele, cu $AC = CC'$, $AB = 30$ cm. Segmentul AP reprezintă o umbrelă care se sprijină în punctul C' .

- Arată că înălțimea suportului este egală cu $30\sqrt{2}$ cm.
- Determină măsura unghiului format de dreapta AP cu planul (ABC) .
- Calculează tangenta unghiului format de planele (ABP) și (ABC) .

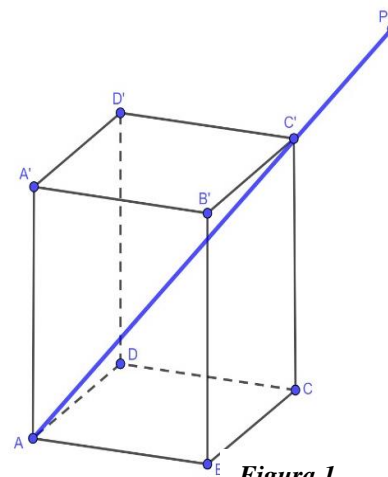


Figura 1

2. În figura 2 este reprezentată piramida patrulateră regulată $VABCD$ cu toate muchiile de lungime $4\sqrt{2}$ cm. Punctele P , M și N sunt mijloacele muchiilor VD , AB , respectiv AD .

- Arată că măsura unghiului dintre dreptele NP și AB este egală cu 60° .
- Determină măsura unghiului format de dreapta VA și planul (MNP) .
- Calculează sinusul unghiului format de planele (VAD) și (VBC) .

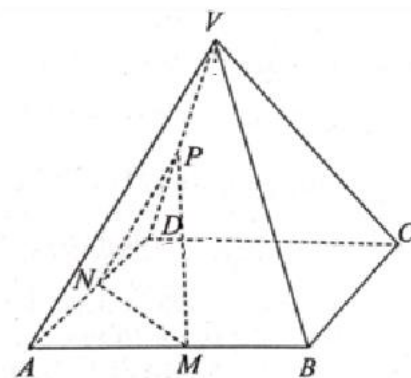


Figura 2

RECOMANDĂRI PENTRU PROFESOR - PREZENTAREA OPTIMĂ A CONȚINUTULUI ȘI DIRIJAREA ÎNVĂȚĂRII

Ținând cont de potențialul cognitiv al elevilor, profesorul îi îndrumă pe elevi și îi antrenează în activitățile de învățare, cu ajutorul prezentării PowerPoint. Noile conținuturi sunt alternate, în prezentare, cu sarcini de lucru pentru elevi, soluționate în mod frontal.

Rezolvare - Fișa de lucru nr. 2

$$a) B'C' \parallel BC \Rightarrow \sphericalangle(AB, B'C') = \sphericalangle(AB, BC) = \sphericalangle ABC = 60^{\circ}.$$

$$b) CC' \parallel AA' \Rightarrow \sphericalangle(AB, CC') = \sphericalangle(AB, AA') = \sphericalangle BAA' = 90^{\circ}.$$

$$c) \left. \begin{array}{l} CC' \parallel AA' \\ AA' \subset (ABB') \end{array} \right\} \Rightarrow CC' \parallel (ABB') \Rightarrow \sphericalangle(CC', (ABB')) = 0^{\circ}.$$

d) Se consideră $CN \perp AB$.

$$\left. \begin{array}{l} AA' \perp (ABC) \\ CN \subset (ABC) \end{array} \right\} \Rightarrow AA' \perp CN$$

$$\left. \begin{array}{l} CN \perp AB \\ CN \perp AA' \\ AB, AA' \subset (ABB') \\ AB \cap AA' = \{A\} \end{array} \right\} \Rightarrow CN \perp (ABB') \Rightarrow pr_{(ABB')} AC = AN$$

$$\Rightarrow \sphericalangle(AC, (ABB')) = \sphericalangle(AC, AN) = \sphericalangle CAN = 60^{\circ}.$$

$$e) \left. \begin{array}{l} (CC'B') \cap (ABB') = BB' \\ BC \perp BB', BC \subset (CC'B') \\ AB \perp BB', AB \subset (ABB') \end{array} \right\} \Rightarrow \sphericalangle((CC'B'), (ABB')) = \sphericalangle(AB, BC) = \sphericalangle ABC = 60^{\circ}$$

Deci $\sphericalangle((CC'B'), (ABB')) \neq 30^{\circ}$.

$$f) \Delta MCA \equiv \Delta MCB \Rightarrow AM \equiv BM \Rightarrow \Delta MAB \text{ isoscel}$$

MN este mediană în $\Delta MAB \Rightarrow MN \perp AB$

$$\left. \begin{array}{l} (MAB) \cap (ABC) = AB \\ MN \perp AB, MN \subset (MAB) \\ CN \perp AB, CN \subset (ABC) \end{array} \right\} \Rightarrow \sphericalangle((ABC), (MAB)) = \sphericalangle(CN, MN) = \sphericalangle MNC$$

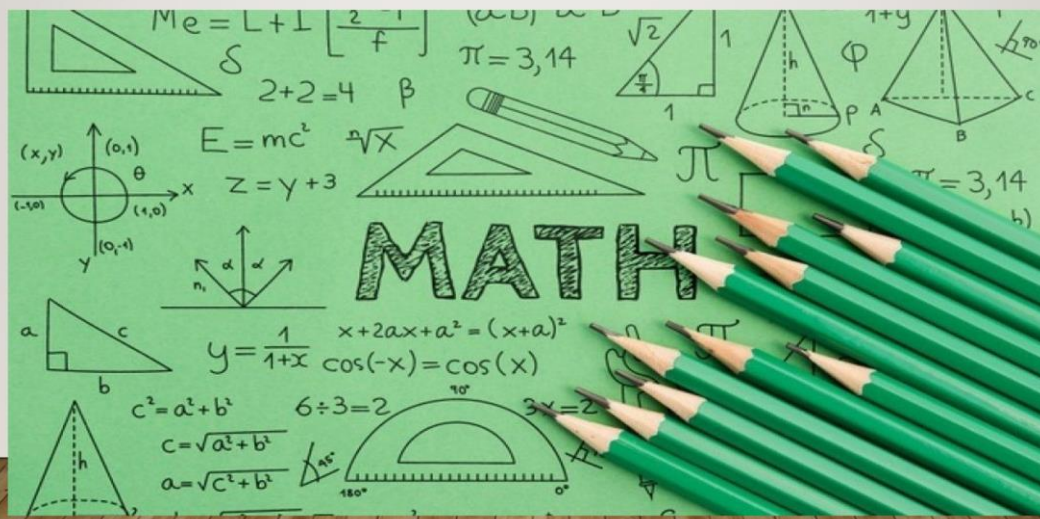
CN înălțime în ΔABC echilateral $\Rightarrow CN = 3\sqrt{3}$ cm

În ΔMCN dreptunghic, $MN^2 = CM^2 + CN^2 \Rightarrow MN = 3\sqrt{7}$ cm

$$\text{În } \Delta MCN \text{ dreptunghic, } \sin \sphericalangle MNC = \frac{MC}{MN} = \frac{2\sqrt{7}}{7}.$$

Anexa nr. 1

UNGHIIURI ÎN SPAȚIU

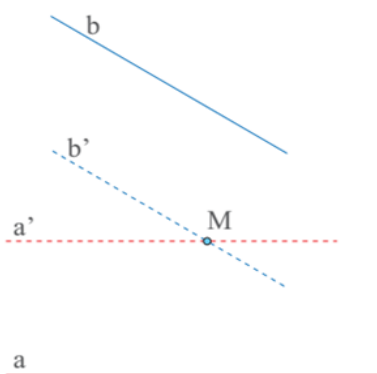


- Dreptele concurente sunt coplanare (situate în același plan) și formează patru unghiuri, două câte două congruente.

- Măsura unghiului dintre două drepte concurente este cea mai mică măsură a unghiurilor formate de cele două drepte.

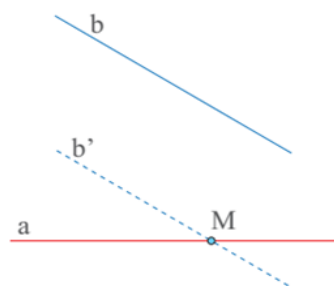
- Măsura unghiului dintre două drepte paralele este egală cu 0° .

- Măsura unghiului dintre două drepte necoplanare este măsura unghiului format de paralelele duse printr-un punct oarecare (convenabil ales) la cele două drepte.



$$\left. \begin{array}{l} a' \parallel a \\ b' \parallel b \\ a' \cap b' = \{M\} \end{array} \right\} \Rightarrow \sphericalangle(a,b) = \sphericalangle(a',b')$$

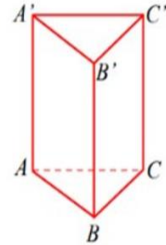
Uneori, punctul M se ia pe una dintre drepte și, prin el, se duce paralela la cealaltă dreaptă (vezi figura din dreapta).





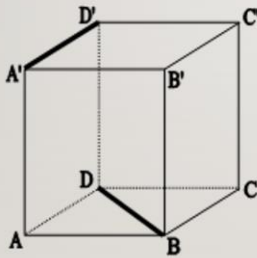
Problemă rezolvată

De exemplu, dacă $ABCA'B'C'$ este o prismă dreaptă având ca bază un triunghi echilateral, măsura unghiului dreptelor AB și $A'C'$ este măsura unghiului ascuțit format de dreapta AB cu paralela dusă prin A la $A'C'$, adică $\sphericalangle BAC = 60^\circ$.

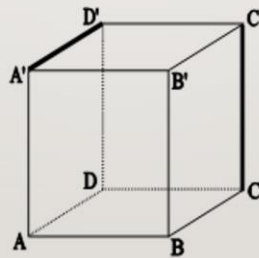


APLICAȚIE

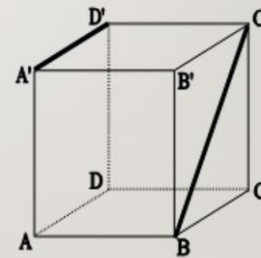
Fie cubul $ABCD A' B' C' D'$. Determinați măsurile unghiurilor dintre dreptele evidențiate.



$$\sphericalangle(A'D', DB) = \dots$$



$$\sphericalangle(A'D', CC') = \dots$$



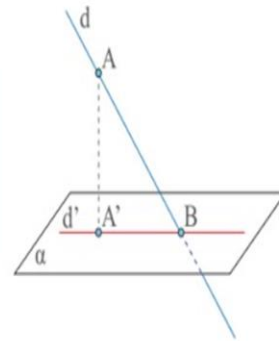
$$\sphericalangle(A'D', BC') = \dots$$

UNGHIIUL DINTRE O DREAPTĂ ȘI UN PLAN

• Unghiul dintre o dreaptă și un plan este unghiul format de dreaptă și proiecția ei pe plan.

Dacă d' este proiecția dreptei d pe planul α , atunci unghiul dintre dreapta d și planul α este unghiul dintre dreapta d și dreapta d' .

Scriu: $\sphericalangle(d, \alpha) = \sphericalangle(d, d')$.



Exemplu: În figura alăturată dreapta $A'B$ este proiecția pe planul α a dreptei AB . $\sphericalangle(AB, \alpha) = \sphericalangle(AB, A'B) = \sphericalangle ABA'$.

• Dacă dreapta este paralelă cu planul, atunci unghiul dintre dreaptă și plan este unghiul nul.

• Unghiul format de dreapta d cu proiecția ei pe planul α este cel mai mic unghi pe care dreapta d îl face cu o dreaptă din planul α .



Problemă rezolvată

În Figura 1, $A \in a, B \notin a, BB' \perp a, B' \in a$.

Dacă $AB = 10$ cm și $AB' = 5$ cm, calculați $\sphericalangle(AB, a)$.

Soluție $B' = pr_a B$ și $u = \sphericalangle(AB, a)$

Avem $AB' = AB \cdot \cos u$

Din $5 = 10 \cdot \cos u$ rezultă $\cos u = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ deci $u = 60^\circ$.

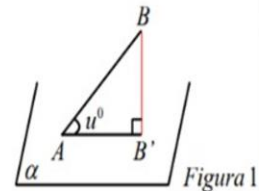
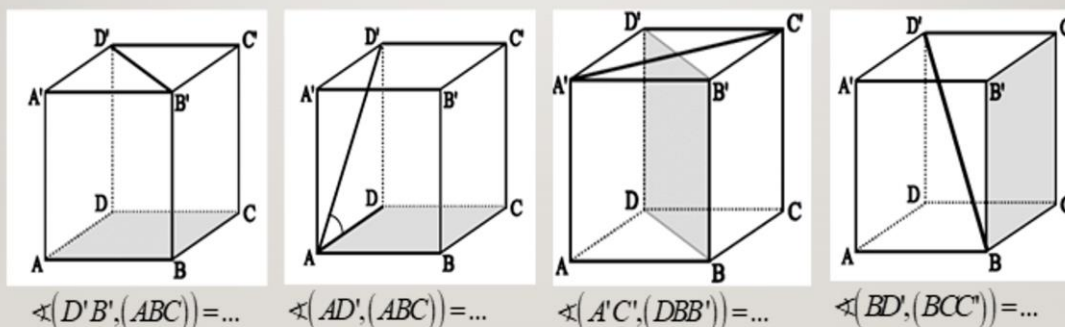


Figura 1

APLICAȚIE

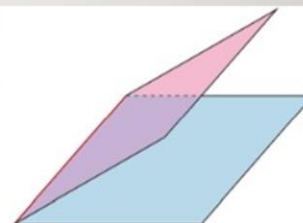
Fie cubul $ABCD A' B' C' D'$. Determinați măsurile unghiurilor dintre dreptele și planele evidențiate.



UNGHII DINTRE DOUĂ PLANE

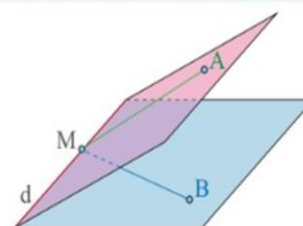
- Unghiul diedru este figura geometrică formată de două semiplane mărginite de aceeași dreaptă.

- Elementele unghiului diedru:
 - ▷ Fețele diedrului sunt cele două semiplane.
 - ▷ Muchia diedrului este dreapta care mărginește cele două semiplane.



- Măsura unghiului diedru este dată de măsura unghiului plan corespunzător diedrului.

- Unghiul plan corespunzător diedrului se obține astfel:
 - ▷ Se consideră un punct pe muchia diedrului.
 - ▷ Prin punctul ales se construiesc perpendiculare pe muchia diedrului în cele două semiplane care reprezintă fețele diedrului.
 - ▷ Unghiul dintre aceste semidrepte este unghiul plan corespunzător diedrului.



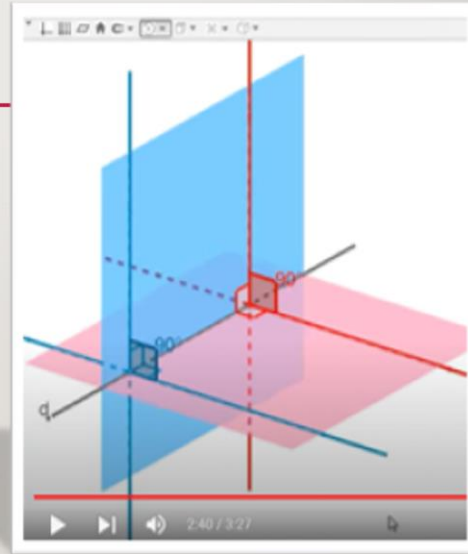
$$\left. \begin{array}{l} M \in d \\ MA \perp d \\ MB \perp d \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{AMB} \text{ este unghiul plan corespunzător diedrului}$$

- Două plane concurente formează patru unghiuri diedre.

- Unghiul a două plane este este unghiul plan ascuțit corespunzător diedrului.

UNGHIUL DINTRE DOUĂ PLANE

- <https://www.geogebra.org/m/PKcgsdMY>

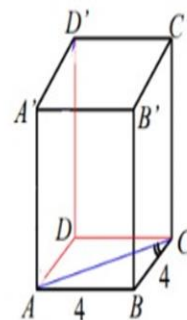


Problemă rezolvată

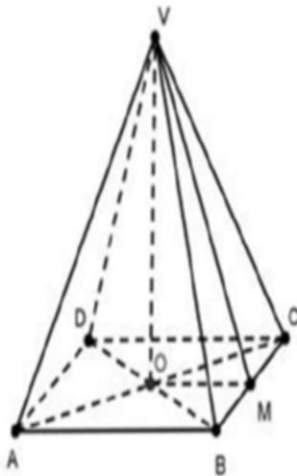
Fie $ABCD A' B' C' D'$ un paralelipiped dreptunghic cu
 $AB = BC = 4$ cm

Calculați măsura unghiului dintre planele: (BCC') și (ACC') .

Soluție $(BCC') \cap (ACC') = CC'$, $BC \perp CC'$ și $BC \subset (BCC')$, $AC \perp CC'$ și $AC \subset (ACC')$. Rezultă că $\sphericalangle(BCC', (ACC')) = \sphericalangle BCA = 45^\circ$.



APLICAȚIE



$VABCD$ este o piramidă patrulateră regulată cu $AB = VA = 10$ cm. Punctul M este mijlocul laturii BC .

Determinați:

- Măsura unghiului dreptelor VA și VC .
- Măsura unghiului dintre dreapta VA și planul (ABC) .
- Măsura unghiului format de planele (VAC) și (VDB) .
- Tangenta unghiului format de planele (VBC) și (ABC) .

- **Bibliografie**

- <https://manuale.edu.ro/manuale/Clasa%20a%20V#H/Matematica/Uy5DLiBDLkQuIFBSRVNT/A896.pdf>

(paginile: 102, 130, 136)

- <https://manuale.edu.ro/manuale/Clasa%20a%20V#H/Matematica/SU5UVUIURVhUICBTLLu/A895.pdf>

(paginile: 139, 169, 172)

II.1.5.TEST DE EVALUARE SUMATIVĂ UNITATEA DE ÎNVĂȚARE „ELEMENTE DE GEOMETRIE ÎN SPAȚIU”

TEST SUMATIV

- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 30 de minute.

Subiectul I

(40 de puncte)

Încercuțiți litera corespunzătoare răspunsului corect.

(10p) 1. Un cilindru circular drept are secțiunea axială un pătrat cu aria egală cu 36 cm^2 . Raza cercului de la baza cilindrului circular drept are lungimea egală cu:

- A. 3 cm B. 4 cm C. 5 cm D. 6 cm

(10p) 2. Câte muchii are în total o piramidă hexagonală?

- A. 6 B. 8 C. 12 D. 14

(10p) 3. O prismă triunghiulară regulată are toate muchiile cu lungimile egale cu 2 m . Aria totală a prisme este egală cu:

- A. 12 m^2 B. $2(6 + \sqrt{3})\text{ m}^2$ C. 24 m^2 D. $2(12 + \sqrt{3})\text{ m}^2$

(10p) 4. În reperul cartezian $Oxyz$ se consideră punctele $A(2, 6, 5)$ și $B(5, -6, 1)$. Lungimea segmentului AB este egală cu:

- A. 9 B. 11 C. 12 D. 13

Subiectul al II -lea

(50 de puncte)

Scrieți rezolvările complete.

Se consideră piramida $VABC$ având baza triunghiul dreptunghic isoscel ABC cu $\sphericalangle A = 90^\circ$, $AB = 6\text{ cm}$ și $VA = 6\sqrt{2}\text{ cm}$. Dreapta VA este perpendiculară pe planul bazei.

(20p) a) Determinați volumul piramidei $VABC$.

(20p) b) Calculați distanța de la punctul V la dreapta BC .

(10p) c) Calculați sinusul unghiului dintre planele (ABC) și (VBC) .

Variantă online: <https://forms.gle/6sF9BVtFkYK9FDJ17>

Barem de evaluare și de notare

- Se acordă zece puncte din oficiu.
- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.

Subiectul I

(40 de puncte)

1.	A	10 p
2	C	10 p
3	B	10 p
4	D	10 p

Subiectul al II -lea

(50 de puncte)

a) $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} = 18 \text{ cm}^2$	10p
$V_{VABC} = \frac{\mathcal{A}_{ABC} \cdot VA}{3} = \frac{18 \cdot 6\sqrt{2}}{3} =$	5p
$= 36\sqrt{2} \text{ cm}^3$	5p
b) $VM \perp BC$, unde punctul M este mijlocul segmentului BC	10p
$AM = 3\sqrt{2} \text{ cm}$	5p
$VM = 3\sqrt{10} \text{ cm}$	5p
c) $\sphericalangle((ABC), (VBC)) = \sphericalangle AMV$, unde M mijlocul segmentului BC	5p
$\sin(\sphericalangle AMV) = \frac{VA}{VM} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$	5p

II.2. MATEMATICĂ – PROGRAMA 4 FILIERA VOCAȚIONALĂ, PROFIL PEDAGOGIC, TOATE SPECIALIZĂRILE, FILIERA VOCAȚIONALĂ, PROFIL SPORTIV, TOATE SPECIALIZĂRILE

II.2.1. EXEMPLU DE PLANIFICARE CALENDARISTICĂ ANUALĂ

Unitatea de învățământ:					
PLANIFICARE CALENDARISTICĂ ANUALĂ					
ANUL ȘCOLAR 2023 – 2024*					
Matematică					
Clasa a XI-a (pedagogic/sportiv)					
1 oră/săptămână					
Unități de învățare	Competențe specifice	Conținuturi	Număr de ore alocate	Săptămâna	Observații/ Modulul
[se menționează titluri/teme]	[se precizează numărul criterial al competențelor specifice din programa școlară]	[din conținuturile programei școlare]	[stabilite de către cadrul didactic]	[se precizează săptămâna sau săptămânile]	[se menționează, de exemplu, modificări în urma realizării activității didactice la clasă]
Recapitulare inițială	CS vizate de programa școlară a clasei a X-a	<i>Recapitulare – clasa a X-a</i>	1	S1	Modulul 1
Grafuri	1.1 2.1 3.1 4.1 5.1	Grafuri <ul style="list-style-type: none"> Graf orientat/neorientat: drum/lanț; circuit/ciclu; lungimea unui drum/lanț; drum/lanț hamiltonian; drum/lanț eulerian. Graf complet, subgraf, graf planar. Graf conex, arbore. Graf ponderat. Problema drumului optim (tipuri de probleme: determinarea drumului cu cheltuială minimă de transport, determinarea drumului cu durată minimă, determinarea drumului de distanță minimă etc.) 	6	S2-S7	

Unități de învățare	Competențe specifice	Conținuturi	Număr de ore alocate	Săptămâna	Observații/ Modulul
Vacanță (28.10.2023 – 5.11.2023)					
Legi de compoziție, proprietăți.	1.2 2.2 3.2 4.2 5.2	Structuri algebrice • Legi de compoziție, proprietăți	7	S8 - S14	Modulul 2
Vacanță (23.12.2023 – 07.01.2024)					
Structuri algebrice	1.2 2.2 3.2 4.2 5.2	Structuri algebrice • Structuri algebrice: monoid, grup	6	S15 – S18 S20 - S21	Modulul 3
Săptămâna verde***(05 – 09.02.2024)			S19		
Vacanță** (24.02.2024 – 03.03.2024)					
Structuri algebrice	1.2 2.2 3.2 4.2 5.2	Structuri algebrice • Structuri algebrice: inel. Exemple: mulțimile $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_n, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$	7	S22 – S26 S28 – S29	Modulul 4
Școala Altfel (15 – 19.04.2024)			S27		
Vacanță (27.04.2024 - 07.05.2024)					
Structuri algebrice	1.2 2.2 3.2 4.2 5.2	Structuri algebrice • Structuri algebrice: corp. Exemple: mulțimile $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_n, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$	3	S30 - S32	Modulul 5

Unități de învățare	Competențe specifice	Conținuturi	Număr de ore alocate	Săptămâna	Observații/ Modulul
Recapitulare finală	CS vizate de programa școlară pentru clasa a XI-a	<ul style="list-style-type: none"> • Aplicații și evaluare • Consolidare/remediere/stimularea performanței 	4	S33-S36	

*Planificarea calendaristică este realizată pentru anul școlar 2023 – 2024, care, pentru clasa a XI-a, are 36 de săptămâni de cursuri (OME nr. 3800/9.03.2023).

**Structura anului școlar 2023 - 2024 prevede o vacanță de o săptămână, în perioada 12 februarie – 3 martie 2024, la decizia inspectoratelor școlare județene/al municipiului București. În exemplul de planificare prezentat, această vacanță este stabilită în perioada 24 februarie – 3 martie 2024.

*** Programul național „Școala altfel” și Programul „Săptămâna verde” se desfășoară în perioada 11 septembrie 2023—26 aprilie 2024, în intervale de câte 5 zile consecutive lucrătoare, a căror planificare se află la decizia unității de învățământ. Derularea celor două programe se planifică în intervale de cursuri diferite.

Competențele specifice (CS) din planificare sunt de forma $n.m$, unde $n = \overline{1,5}$ corespunde numerotării competențelor generale din programa școlară și $m = \overline{1,2}$ corespunde conținuturilor din programa școlară, astfel:

$m = 1$ pentru Grafuri

$m = 2$ pentru Structuri algebrice

Planificarea este realizată pentru următoarea structură a anului școlar:

Modulul	Perioada	Săptămânile de școală							
		1	2	3	4	5	6	7	
Modulul 1	11 septembrie – 27 octombrie 2023 (7 săptămâni)								
Modulul 2	6 noiembrie – 22 decembrie 2023 (7 săptămâni)	8	9	10	11	12	13	14	
Modulul 3	8 ianuarie – 23 februarie 2024 (6 săptămâni+ <i>Școala Verde_S19</i>)	15	16	17	18	19	20	21	
Modulul 4	4 martie – 26 aprilie 2024 (7 săptămâni + <i>Școala Altfel_S27</i>)	22	23	24	25	26	27	28	29
Modulul 5	8 mai – 21 iunie 2024 (7 săptămâni)	30	31	32	33	34	35	36	

II.2.2. ELEMENTE DE PROIECTARE DIDACTICĂ - EXEMPLIFICARE PENTRU UNITATEA DE ÎNVĂȚARE „LEGI DE COMPOZIȚIE”

DOMENIUL DE CONȚINUT	ALGEBRĂ				
UNITATE DE ÎNVĂȚARE	Legi de compoziție. Proprietăți				
Nr. ore alocate	7				
TITLUL LECȚIEI	CONȚINUTURI	COMPETENȚE SPECIFICE	ACTIVITĂȚI DE ÎNVĂȚARE	RESURSE	EVALUARE
Legi de compoziție. Introducere	Noțiuni introductive. Notății pentru o lege de compoziție	2.1	A1. Identificarea elementelor produsului cartezian a două mulțimi în situații concrete A2. Utilizarea definiției legii de compoziție în identificarea unor exemple de legi de compoziție deja cunoscute A3. Utilizarea unor notații în definirea unor legi de compoziție diferite de cea aditivă și cea multiplicativă	- resurse procedurale: conversația, explicația, demonstrația, exercițiul, rezolvarea de probleme; - resurse materiale: manual, tablă, auxiliare, laptop/telefon, videoproiector; - resurse web: Google forms, quizziz eduboom, Kahoot	Evaluarea achizițiilor anterioare - elemente ancoră pentru noua învățare Feedback și analiză Observare sistematică Evaluarea noilor achiziții
Adunarea și înmulțirea modulo n	Adunarea și înmulțirea modulo n	2.1 2.2 2.3	A1. Utilizarea teoremei împărțirii cu rest în determinarea resturilor unor împărțiri A2. Utilizarea definițiilor în efectuarea unor adunări și înmulțiri modulo n A3. Identificarea de metode diferite de calcul a unor sume și produse modulo n A4. Rezolvarea de ecuații și sisteme de ecuații în care intervin adunări și înmulțiri modulo n	- resurse procedurale: conversația, explicația, demonstrația, exercițiul, rezolvarea de probleme; - resurse materiale: manual, tablă, auxiliare, laptop/telefon, videoproiector, fișă de lucru - resurse web: Google forms, quizziz, eduboom, Kahoot Exemplu: https://create.kahoot.it/share/resturi-modulo-n/2ebc23b5-10ec-4df5-8602-42f6d4612d9e	Evaluare scrisă formativă (<i>Quizziz, Google forms, Kahoot</i>); Observare directă

<p>Parte stabilă. Lege de compoziție internă.</p>	<p>Parte stabilă. Lege de compoziție internă. Tabla unei legi de compoziție</p>	<p>2.1 2.2 2.3</p>	<p>A1. Identificarea unor submulțimi ale numerelor întregi care sunt părți stabile ale mulțimii numerelor întregi în raport cu operațiile de adunare și înmulțire A2. Formarea obișnuinței de a verifica dacă o funcție (bine definită) este lege de compoziție internă A3. Alcătuirea tablei unei legi de compoziție A4. Utilizarea tablei unei legi de compoziție în identificarea unor submulțimi care sunt părți stabile ale mulțimii pe care e definită legea A5. Rezolvarea de ecuații și sisteme de ecuații cu legi de compoziție</p>	<p>- resurse procedurale: conversația, explicația, demonstrația, exercițiul, rezolvarea de probleme ; - resurse materiale: manual, tablă, auxiliare, laptop/telefon, videoproiector, fișă de lucru - resurse web: Google forms, quizziz, eduboom, Kahoot</p>	<p>Evaluare curentă: observare sistematică</p>
<p>Proprietăți ale legilor de compoziție: comutativitatea și asociativitatea</p>	<p>Proprietăți ale legilor de compoziție: comutativitatea și asociativitatea</p>	<p>2.3</p>	<p>A1. Identificarea unor operații asociative, respectiv comutative pe mulțimi de numere A2. Formarea obișnuinței de a verifica dacă o lege de compoziție este asociativă sau comutativă A3. Determinarea unor parametri reali ce intervin în definirea unor legi de compoziție care sunt asociative/comutative</p>	<p>- resurse procedurale: conversația, explicația, demonstrația, exercițiul; - resurse materiale: manual, tablă, auxiliare, laptop/telefon, videoproiector, fișă de lucru</p>	<p>Evaluare curentă: observare directă</p>

Proprietăți ale legilor de compoziție: element neutru	Proprietăți ale legilor de compoziție: element neutru	2.3	<p>A1. Identificarea elementului neutru al unei legi de compoziție, pe baza definiției acestuia</p> <p>A2. Formarea obișnuinței de a verifica dacă un element dat este element neutru pentru o lege de compoziție sau nu</p> <p>A3. Utilizarea tablei unei legi de compoziție în determinarea elementului neutru</p> <p>A4. Determinarea unui parametru real care intervine în definirea unei legi de compoziție care admite un element neutru cunoscut</p>	<p>- resurse procedurale: conversația, explicația, demonstrația, exercițiul;</p> <p>- resurse materiale: manual, tablă, auxiliare, laptop/telefon, videoproiector, fișă de lucru</p>	Evaluare curentă: observare sistematică
Proprietăți ale legilor de compoziție: elemente simetrizabile	Proprietăți ale legilor de compoziție: elemente simetrizabile	2.3	<p>A1. Identificarea elementelor simetrizabile ale unei mulțimi în raport cu o lege de compoziție</p> <p>A2. Formarea obișnuinței de a verifica dacă un element dat este simetricul altuia în raport cu o anumite lege de compoziție</p> <p>A3. Determinarea simetricului unui element dat în raport cu o anumite lege de compoziție</p> <p>A4. Utilizarea tablei unei legi de compoziție în determinarea elementelor simetrizabile și a simetricelor acestora</p>	<p>- resurse procedurale: conversația, explicația, demonstrația, exercițiul;</p> <p>- resurse materiale: manual, tablă, auxiliare, laptop/telefon, videoproiector, fișă de lucru</p>	Evaluare curentă: observare directă Evaluarea noilor achiziții
Aplicații și evaluare	Proprietăți ale legilor de compoziție	2.1 2.2 2.3	<p>A1. Verificarea proprietăților unei legi de compoziție</p> <p>A2. Utilizarea tablei unei legi de compoziție în verificarea proprietăților acesteia</p> <p>A3. Aplicarea proprietăților unei legi de compoziție în calculul unor expresii</p>	<p>- resurse procedurale: conversația, demonstrația, problematizarea, exercițiul;</p> <p>- resurse materiale: tablă, auxiliare, laptop/telefon, videoproiector, fișe de lucru, instrumente electronice de evaluare.</p>	Evaluare sumativă Feedback în vederea stabilirii unui plan de activități remediale/de aprofundare

II.2.3. TEST INIȚIAL

TEST INIȚIAL PROFIL PEDAGOGIC

- Toate subiectele sunt obligatorii.
 - Se acordă zece puncte din oficiu.
 - Timpul efectiv de lucru este de 30 de minute.
1. Dacă $A = \{-2; 0; 1\}$ și $B = \{0; 1\}$ atunci mulțimea $A \times B$ are:
a) 4 elemente b) 6 elemente c) 8 elemente d) 9 elemente
 2. Se consideră mulțimile $A = \{1, 3, 5\}$ și $B = \{2, 4, 6\}$. Numărul de perechi (x, y) cu proprietatea că $x < y$ conținute de mulțimea $A \times B$ este egal cu:
a) 3 b) 9 c) 6 d) 4
 3. Se consideră mulțimea $I = \{x \in \mathbb{R} / -2 \leq x < 6\}$. Dacă $M = I \cap \mathbb{Z}$, atunci cardinalul mulțimii M este egal cu:
a) ∞ b) 9 c) 7 d) 8
 4. Rezultatul calculului $\sqrt{2} + \sqrt{8} - \sqrt{-(-2)^5}$ este:
a) $7\sqrt{2}$ b) $\sqrt{2}$ c) $-\sqrt{2}$ d) -1
 5. Mulțimea soluțiilor ecuației $x + 3 = \sqrt{x + 3}$ este:
a) $\{2; 3\}$ b) $\{0; 3\}$ c) $\{-3; -2\}$ d) $\{-3; 0\}$
 6. Suma soluțiilor reale ale ecuației $7^{4-|x|} = 49$ este:
a) 2 b) 0 c) -4 d) 7
 7. Dintre numerele $\sqrt[3]{2}$; 2^{-2} ; $\frac{1}{\sqrt{2}}$ și 128 este mai mic numărul:
a) $\sqrt[3]{2}$ b) 2^{-2} c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ d) 128
 8. Numărul $a = \log_5 125 + \log_{\frac{1}{5}} 5 - 2 \log_5 \sqrt{125}$ este egal cu:
a) -1 b) -2 c) -4 d) 18
 9. Mulțimea numerelor reale pentru care este definită expresia $\log_2(3x + 9)$ este:
a) $[-3, +\infty)$ b) $(3, +\infty)$ c) $(-3, +\infty)$ d) $(-\infty, -3)$
 10. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3^x$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 3^{x-2} + 8$. Punctul de intersecție a graficelor celor două funcții are abscisa egală cu:
a) 1 b) 2 c) 3 d) 4
 11. Produsul soluțiilor ecuației $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$ este egal cu:
a) 3 b) 4 c) 1 d) 0
 12. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$. Suma $f(-1) + f(0)$ este egală cu:
a) 1 b) 2 c) 3 d) 4
 13. Soluțiile ecuației $\log_5(x^2 + x + 1) = 0$ sunt:
a) 0 și 1 b) -1 și 0 c) -2 și 1 d) -2 și 0

14. Dacă o persoană depune la o bancă cu dobânda anuală de 15% suma de 1000 de lei, de ce sumă va dispune după un an?
 a) 150 de lei b) 1150 de lei c) 115 lei d) 1115 lei
15. Ordinea crescătoare a numerelor $a = A_6^2 - 1$, $b = 4! + 3!$ și $c = C_6^3$ este:
 a) $a < b < c$ b) $c < a < b$ c) $c < b < a$ d) $b < a < c$
16. Soluția ecuației $C_n^{n-1} = 2$ este:
 a) 10 b) 32 c) 25 d) 20
17. Probabilitatea ca, alegând un număr natural de două cifre \overline{ab} , acesta să fie pătrat perfect este egală cu:
 a) $\frac{5}{89}$ b) $\frac{1}{10}$ c) $\frac{1}{18}$ d) $\frac{1}{15}$
18. Se consideră mulțimea $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Câte numere impare de 3 cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii A ?
 a) 16 b) 18 c) 24 d) 32

Barem de evaluare și de notare

- Se acordă zece puncte din oficiu.
- Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare
- Nu se acordă punctaje intermediare

1. b – 5 puncte	7. b – 5 puncte	13. b – 5 puncte
2. c – 5 puncte	8. a – 5 puncte	14. b – 5 puncte
3. d – 5 puncte	9. c – 5 puncte	15. b – 5 puncte
4. c – 5 puncte	10. b – 5 puncte	16. c – 5 puncte
5. c – 5 puncte	11. d – 5 puncte	17. d – 5 puncte
6. b – 5 puncte	12. a – 5 puncte	18. b – 5 puncte

Varianata online:

<https://docs.google.com/forms/d/e/1FAIpQLScpL03syOWeiN120WS7ebSSTVn6G4peQ1iKit0ADJEsQVivDfQ/viewform>

II.2.4. LECȚIA „PROPRIETĂȚI ALE LEGILOR DE COMPOZIȚIE. ELEMENTE SIMETRIZABILE” - EXEMPLU DE ORGANIZARE A TIMPULUI DIDACTIC. EXEMPLE DE RESURSE.

Timp didactic	Componentă	Profesor	Elev	Resurse	Organizarea activității
2 minute	Moment organizatoric	Notează prezența, trimite elevilor linkul testului.	Elevii pregătesc caietele, dar și telefoanele mobile sau tabletele pentru a putea accesa testul propus.		
8 minute	Reactualizarea cunoștințelor anterioare	Facilitează actualizarea cunoștințelor din lecția anterioară: <i>quizziz.element neutru</i>	https://quizizz.com/join/quiz/64d62efd137e650008d7e377/start	- resurse digitale: quizizz	individual; frontal
5 minute	Captarea atenției	Propune elevilor să scrie opusul numărului 3 și inversul numărului 3 în mulțimea numerelor reale și să precizeze în raport cu care element neutru au stabilit aceste elemente simetrice ale lui 3.	Elevii observă că operația de adunare a numerelor reale admite ca element neutru pe 0 și în raport cu el găsesc opusul lui 3, adică -3 . Pentru a doua sarcină vor constata că în raport cu 1, elementul neutru pentru înmulțirea numerelor reale, inversul lui 3 este $\frac{1}{3}$	- resurse procedurale: conversația, explicația, demonstrația; - resurse materiale: tablă; caiete; instrumente de scris	frontal
2 minute	Anunțarea temei și activităților de învățare principale	Anunță titlul lecției.	Elevii notează pe caiete titlul lecției.		
	Prezentarea optimă a conținutului și dirijarea învățării	Introduce definiția. Dacă „ $*$ ” este o lege de compoziție pe mulțimea M , având elementul neutru e , spunem că un element $x \in M$ este <i>simetrizabil</i> față de legea de compoziție „ $*$ ” dacă există $x' \in M$ cu proprietatea:	Pornind de la exemplul anterior, observă că în notația aditivă simetricul elementului x se notează cu $-x$ și se numește opusul lui x , iar în notație multiplicativă simetricul lui x , dacă există, se notează cu x^{-1} sau $\frac{1}{x}$ și se numește inversul lui x (iar	- resurse procedurale: conversația, explicația, demonstrația; - resurse materiale: tablă; caiete; instrumente de scris	frontal

		$x * x' = x' * x = e$ Elementul x' se numește simetricul lui x în raport cu legea de compoziție „ $*$ ”.	$x \neq 0$ se numește element inversabil).		
10 minute	Prezentarea optimă a conținutului și dirijarea învățării	Oferă contexte de înțelegere a diferenței dintre element simetric și element simetrizabil.	Îndrumați de profesor, elevii stabilesc diferența dintre elementul simetric care se referă la x' , simetricul lui x și element simetrizabil care se referă la x , căruia i se poate găsi un element simetric.	- resurse procedurale: conversația, explicația, demonstrația; - resurse materiale: tablă; caiete; instrumente de scris	frontal
		Sprijină și îndrumă elevii în determinarea elementelor simetrizabile din diferite mulțimi față de anumite operații.	Rezolvă exercițiile de la 1 la 3 din fișa de lucru. Determină $U(Z)$ față de operația de adunare și față de operația de înmulțire.	- resurse procedurale: conversația, explicația, demonstrația; - resurse materiale: tablă; caiete; instrumente de scris	
		Introduce notația $U(M)$ pentru mulțimea elementelor din M simetrizabile în raport cu legea de compoziție „ $*$ ”, asociativă și cu element neutru.	Rezolvă în perechi exercițiul 4 din fișa de lucru.	resurse procedurale: conversația, explicația, demonstrația; resurse materiale:	
		Sprijină și îndrumă elevii în compararea și observarea unor asemănări și deosebiri între noțiunile matematice învățate.	Rezolvă exercițiul 5 și observă că legile de compoziție pot să nu admită element neutru pe o anumită mulțime, deci nu se pot determina elementele simetrizabile în mulțimile respective.	resurse procedurale: conversația, explicația, demonstrația; resurse materiale: tablă; caiete; instrumente de scris	
		Facilitează formarea/consolidarea obișnuinței elevilor de a verifica dacă o problemă poate avea sau nu soluție/soluții, dacă o soluție este unică sau nu.			

		Evidențiază unicitatea elementului simetric cu ajutorul următoarei teoreme: Fie „ $*$ ” o lege de compoziție asociativă și cu element neutru, definită pe M . Dacă $x \in M$ are un element simetric, atunci acesta este unic.			
10 minute	Fixarea cunoștințelor	Sprrijină și îndrumă elevii în vederea determinării elementului neutru și a elementelor simetrizabile ale unor legi de compoziție pe anumite mulțimi. Propune situații relevante de rezolvare de probleme.	Rezolvă în perechi exercițiul 6 din fișa de lucru. Formulează și compară raționamentele împreună cu colegul de bancă.	- resurse procedurale: conversația, explicația, demonstrația; - resurse materiale: tablă, videoproiector, laptop, telefon	în perechi; frontal
5 minute	Asigurarea retenției și transferului	Stabilește tema pentru acasă, completând cerințe prestabilite cu noi cerințe ca urmare a feedback-ului primit de la elevi.	Elevii vor formula trei exemple de legi de compoziție definite pe anumite mulțimi și vor determina elementul neutru și elementele simetrizabile în raport cu legile propuse.	- resurse procedurale: conversația, explicația - resurse materiale: tablă; caiete; instrumente de scris	individual
8 minute	Evaluare la final de lecție	Evaluare pentru învățare – elemente simetrizabile.	https://create.kahoot.it/details/33388af9-114f-4cc1-a9f4-1e94237bb044	- resurse procedurale: exercițiul - resurse web: test Kahoot	individual

ACTIVITATE ÎN PERECHI – Determinarea simetricului unui element în raport cu o lege de compoziție și a elementelor simetrizabile ale unei mulțimi în raport cu acea lege de compoziție.

Elevii vor lucra în perechi pentru consolidarea noțiunilor de simetric și simetrizabil. Unul dintre colegi va determina simetricul lui x în raport cu legea de compoziție „ $*$ ”, iar celălalt elementele simetrizabile ale unei mulțimi în raport cu legea de compoziție „ $*$ ”. În final, elevii vor compara rezultatele colegilor și vor stabili împreună cu profesorul corectitudinea rezolvării exercițiilor.

Sarcini de lucru în pereche

ELEMENT SIMETRIC	ELEMENTE SIMETRIZABILE
<p>1. Determinați simetricul lui 2 în raport cu adunarea numerelor întregi.</p>	<p>1. Găsiți elementele simetrizabile din mulțimea \mathbb{N} față de adunarea numerelor naturale.</p>
<p>2. Determinați simetricul lui 2 în raport cu înmulțirea numerelor întregi.</p>	<p>2. Găsiți elementele simetrizabile în raport cu înmulțirea pe mulțimea \mathbb{Z}.</p>
<p>3. Determinați simetricul lui 2 în raport cu înmulțirea numerelor raționale.</p>	<p>3. Câte elemente sunt simetrizabile față de adunarea definită pe mulțimea \mathbb{Z}?</p>
<p>4. Determinați simetricul lui 2 în raport cu legea de compoziție $x * y = xy - 7x - 7y + 56$, unde x și y sunt numere reale.</p>	<p>4. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = xy - 7x - 7y + 56$ al cărei element neutru este 8. Determinați elementele simetrizabile în raport cu legea de compoziție „$*$”.</p>
<p>5. Determinați simetricul lui 2 în raport cu legea de compoziție $x * y = xy + 4x + 4y + 12$, unde x și y aparțin mulțimii $M = (-4, +\infty)$.</p>	<p>5. Pe mulțimea $M = (-4, +\infty)$ se definește legea de compoziție $x * y = xy + 4x + 4y + 12$. Determinați elementele simetrizabile în raport cu legea de compoziție „$*$”.</p>
<p>6. Determinați simetricul lui $\hat{3}$ în raport cu operația de înmulțire modulo 5 pe mulțimea \mathbb{Z}_5.</p>	<p>6. Se consideră $\mathbb{Z}_6 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{5}\}$, mulțimea claselor de resturi modulo 6.</p> <p>a) Completați tabla înmulțirii claselor de resturi modulo 6.</p> <p>b) Precizați elementul neutru în raport cu înmulțirea claselor de resturi modulo 6.</p> <p>c) Determinați elementele simetrizabile ale mulțimii \mathbb{Z}_6 în raport cu înmulțirea claselor de resturi modulo 6.</p>

II.2.5. TESTE DE EVALUARE SUMATIVĂ - UNITATEA DE ÎNVĂȚARE „LEGI DE COMPOZIȚIE”

TESTUL 1

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Se acordă zece puncte din oficiu
- Timp de lucru 50 de minute

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = 5xy - 5x - 5y + 6$.

10p	1. Arătați că $5 * 1 = 1$.
10p	2. Arătați că $x * y = 5(x-1)(y-1) + 1$, pentru orice numere reale x și y .
10p	3. Demonstrați că $x * y \geq 1$, pentru orice $x \geq 1$ și $y \geq 1$.
10p	4. Arătați că legea de compoziție „*” este asociativă.
10p	5. Arătați că $e = \frac{6}{5}$ este elementul neutru al legii „*”.
10p	6. Determinați simetricul lui $\frac{2}{5}$ în raport cu legea de compoziție „*”.
10p	7. Determinați numerele reale $x > -1$ pentru care $3^x * \log_3(x+1) = 1$.
10p	8. Determinați perechile (m, n) de numere naturale, cu $m < n$, pentru care $m * n = 31$.
10p	9. Calculați $\frac{2023}{1} * \frac{2023}{2} * \frac{2023}{3} * \dots * \frac{2023}{2024}$.

Barem de evaluare și de notare

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu.

1.	$5 * 1 = 5 \cdot 5 \cdot 1 - 5 \cdot 5 - 5 \cdot 1 + 6 =$	7p
	$= 25 - 25 - 5 + 6 = 1$	3p
2.	$x * y = 5xy - 5x - 5y + 5 + 1 = 5x(y-1) - 5(y-1) + 1 =$	6p
	$= (x-1)(5y-5) + 1 = 5(x-1)(y-1) + 1$, pentru orice numere reale x și y	4p
3.	Cum $x \geq 1$ și $y \geq 1$, obținem că $x-1 \geq 0$ și $y-1 \geq 0$	6p
	$5(x-1)(y-1) \geq 0$, pentru orice $x \geq 1$ și $y \geq 1 \Rightarrow x * y \geq 1$, pentru orice $x \geq 1$ și $y \geq 1$	4p
4.	$(x * y) * z = [5(x-1)(y-1) + 1] * z = 25(x-1)(y-1)(z-1) + 1$, pentru orice numere reale x , y și z	4p
	$x * (y * z) = x * [5(y-1)(z-1) + 1] = 25(x-1)(y-1)(z-1) + 1 = (x * y) * z$, pentru orice numere reale x , y și z , deci legea de compoziție „*” este asociativă	6p

5.	$x * \frac{6}{5} = 5x \cdot \frac{6}{5} - 5x - 5 \cdot \frac{6}{5} + 6 = 6x - 5x - 6 + 6 = x$, pentru orice număr real x	4p
	$\frac{6}{5} * x = 5 \cdot \frac{6}{5} \cdot x - 5 \cdot \frac{6}{5} - 5x + 6 = 6x - 6 - 5x + 6 = x$, pentru orice număr real x , deci $\frac{6}{5}$ este elementul neutru al legii de compoziție „*”	6p
6.	$x * \frac{2}{5} = \frac{2}{5} * x = \frac{6}{5}$, pentru orice număr real x , iar $x * \frac{2}{5} = -3x + 4$, pentru orice număr real x	4p
	$-3x + 4 = \frac{6}{5}$, de unde obținem că simetricul lui $\frac{2}{5}$ în raport cu legea de compoziție „*” este $x = \frac{14}{15}$	6p
7.	$3^x * \log_3(x+1) = 5(3^x - 1)(\log_3(x+1) - 1) + 1$, pentru orice număr real $x > -1$	3p
	$(3^x - 1)(\log_3(x+1) - 1) = 0$, de unde obținem $x = 0$ sau $x = 2$, care convin	7p
8.	$5(m-1)(n-1) + 1 = 31 \Leftrightarrow (m-1)(n-1) = 6$	4p
	Cum m și n sunt numere naturale cu $m < n$, obținem perechile $(2, 7)$ și $(3, 4)$	6p
9.	$x * 1 = 1$ și $1 * x = 1$, pentru orice număr real x	4p
	$\left(\frac{2023}{1} * \frac{2023}{2} * \dots * \frac{2023}{2022}\right) * 1 * \frac{2023}{2024} = 1 * \frac{2023}{2024} = 1$	6p

TESTUL 2

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Se acordă zece puncte din oficiu
- Timp de lucru 50 de minute

Subiectul I (50p)

1. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = xy - \sqrt{3}x - \sqrt{3}y + \sqrt{3} + 3$.

a) (10p) Arătați că $\sqrt{3} * (-\sqrt{3}) = \sqrt{3}$.

b) (10p) Demonstrați că $x * y = (x - \sqrt{3})(y - \sqrt{3}) + \sqrt{3}$, pentru orice numere reale x și y .

c) (10p) Demonstrați că $e = 1 + \sqrt{3}$ este elementul neutru al legii de compoziție.

d) (10p) Determinați numerele reale a pentru care $a * a = 3 + \sqrt{3}$.

e) (10p) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $9^x * 3^x = \sqrt{3}$.

Subiectul al II-lea (40p)

2. Pe mulțimea $G = [4, +\infty)$ se consideră legea de compoziție asociativă $x \circ y = xy - 4(x + y) + 20$.

a) (10p) Determinați mulțimea valorilor reale ale lui $x \in G$, pentru care $x \circ x \leq 5$.

b) (10p) Determinați numerele reale $x \in G$, pentru care $x \circ \log_4 x = 4$.

c) (10p) Arătați că $a \circ 4 = 4 \circ a = 4$, pentru orice număr a din mulțimea G .

d) (10p) Calculați $1 \circ 2 \circ 3 \circ \dots \circ 2023$.

Barem de evaluare și de notare

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu.

Subiectul I (50 de puncte)

1)	$\sqrt{3} * (-\sqrt{3}) = \sqrt{3} \cdot (-\sqrt{3}) - \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} - \sqrt{3} \cdot (-\sqrt{3}) + \sqrt{3} + 3 =$ $= -3 - 3 + 3 + \sqrt{3} + 3 = \sqrt{3}.$	6p 4p
2)	$x * y = xy - \sqrt{3}x - \sqrt{3}y + (-\sqrt{3}) \cdot (-\sqrt{3}) + 3 =$ $= (x - \sqrt{3})(y - \sqrt{3}) + \sqrt{3}$ pentru orice numere reale x și y	5p 5p
3)	$x * (1 + \sqrt{3}) = (x - \sqrt{3})(1 + \sqrt{3} - \sqrt{3}) + \sqrt{3} = x - \sqrt{3} + \sqrt{3} = x$, pentru orice număr real x $(1 + \sqrt{3}) * x = (1 + \sqrt{3} - \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) + \sqrt{3} = x - \sqrt{3} + \sqrt{3} = x = x * (1 + \sqrt{3})$, pentru orice număr real x , deci $e = 1 + \sqrt{3}$ este elementul neutru al legii de compoziție	4p 6p
4)	$(a - \sqrt{3})(a - \sqrt{3}) + \sqrt{3} = 3 + \sqrt{3} \Leftrightarrow (a - \sqrt{3})^2 = 3$ $a = 0$ sau $a = 2\sqrt{3}$	6p 4p
5)	$(9^x - \sqrt{3})(3^x - \sqrt{3}) + \sqrt{3} = \sqrt{3} \Leftrightarrow (9^x - \sqrt{3})(3^x - \sqrt{3}) = 0$ $x = \frac{1}{4}$ sau $x = \frac{1}{2}$	6p 4p

Subiectul al II – lea (40 de puncte)

1)	$x \circ x = x^2 - 4(x + x) + 20 = x^2 - 8x + 20 \leq 5 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 15 \leq 0$ $x^2 - 8x + 16 \leq 1 \Leftrightarrow (x - 4)^2 \leq 1$ $x \in [3, 5] \cap G \Rightarrow x \in [4, 5]$	6p 4p
2)	$(x - 4)(\log_4 x - 4) + 4 = 4 \Leftrightarrow (x - 4)(\log_4 x - 4) = 0$ $x = 4$ sau $x = 256$ care convin	5p 5p
3)	$a \circ 4 = a \cdot 4 - 4(a + 4) + 20 = 4a - 4a - 16 + 20 = 4$ $4 \circ a = 4 \cdot a - 4(4 + a) + 20 = 4a - 16 - 4a + 20 = 4$, deci $a \circ 4 = 4 \circ a = 4$ pentru orice număr a din mulțimea G	3p 7p
4)	$x \circ 4 = 4, 4 \circ y = 4$ pentru orice numere x și y din mulțimea G $((1 \circ 2 \circ 3) \circ 4) \circ (5 \circ 6 \circ \dots \circ 2023) = 4 \circ (5 \circ 6 \circ \dots \circ 2023) = 4$	4p 6p

II.3. MATEMATICĂ – PROGRAMA 5_FILIERA TEORETICĂ, PROFIL UMANIST, SPECIALIZAREA ȘTIINȚE SOCIALE, FILIERA VOCAȚIONALĂ, PROFIL MILITAR M.A.I., SPECIALIZAREA ȘTIINȚE SOCIALE, FILIERA VOCAȚIONALĂ, PROFIL TEOLOGIC, TOATE SPECIALIZĂRILE, CU EXCEPȚIA SPECIALIZĂRILOR TEOLOGIE ORTODOXĂ ȘI PATRIMONIUL CULTURAL

II.3.1. EXEMPLU DE PLANIFICARE CALENDARISTICĂ ANUALĂ

Unitatea de învățământ:					
PLANIFICARE CALENDARISTICĂ ANUALĂ					
ANUL ȘCOLAR 2023 – 2024*					
Matematică					
Clasa a XI-a (științe sociale/teologic)					
2 ore/săptămână					
Unități de învățare	Competențe specifice	Conținuturi	Număr de ore alocate	Săptămâna	Observații/ Modulul
[se menționează titluri/teme]	[se precizează numărul criterial al competențelor specifice din programa școlară]	[din conținuturile programei școlare]	[stabilite de către cadrul didactic]	[se precizează săptămâna sau săptămânile]	[se menționează, de exemplu, modificări în urma realizării activității didactice la clasă]
Recapitulare inițială	CS vizate de programa școlară a clasei a X-a	<i>Recapitulare – clasa a X-a</i> <i>Evaluare inițială</i> <i>Activități remediale și/sau de progres</i>	4	S1-S2	Modulul 1
Statistică	1.1 2.1 3.1 4.1	<ul style="list-style-type: none"> • Culegerea, clasificarea și reprezentarea datelor statistice • Interpretarea datelor statistice: parametri de poziție • Metode matematice folosite în interpretarea datelor statistice: <ul style="list-style-type: none"> ○ Compararea datelor statistice utilizând media și mediana ○ Indicatori statistici ai variabilelor cantitative 	8	S3-S6	

Unități de învățare	Competențe specifice	Conținuturi	Număr de ore alocate	Săptămâna	Observații/ Modulul
Școala altfel*** (23.10.2023 – 27.10.2023)				S7	
Vacanță (28.10.2023 – 05.11.2023)					
Studii de caz-teme sociale sau de administrație publică	1.1 2.1 3.1 4.1 5.1	<ul style="list-style-type: none"> Studii de caz: reprezentarea și interpretarea datelor statistice publicate în urma desfășurării unor sondaje de opinie, sondaje statistice sau studii statistice pe teme sociale sau de administrație publică 	14	S8 - S14	Modulul 2
Vacanță (23.12.2023 – 07.01.2024)					
Studii de caz- teme economice	1.1 2.1 3.1 4.1 5.1	<ul style="list-style-type: none"> Studii de caz: reprezentarea și interpretarea datelor statistice publicate în urma desfășurării unor sondaje de opinie, sondaje statistice sau studii statistice pe teme economice 	10	S15 – S19	Modulul 3
Grafuri	1.2 2.2 3.2 4.2	<ul style="list-style-type: none"> Graf orientat/neorientat: drum/lanț 	4	S20 – S21	
Vacanță** (24.02.2024– 03.03.2024)					
Grafuri	1.2 2.2 3.2 4.2	<ul style="list-style-type: none"> Circuit/ciclu; lungimea unui drum/lanț; drum/lanț hamiltonian; drum/lanț eulerian Graf complet, subgraf, graf planar Graf conex, arbore Graf ponderat 	14	S22 – S28	Modulul 4
Săptămâna verde***				S29	
Vacanță (27.04.2023 - 07.05.2024)					
Problema drumului optim	1.2 2.2 3.2 4.2 5.2	<ul style="list-style-type: none"> Tipuri de probleme: determinarea drumului cu cheltuială minimă de transport, determinarea drumului cu durată minimă, determinarea drumului de distanță minimă etc. 	10	S30 – S34	Modulul 5

Unități de învățare	Competențe specifice	Conținuturi	Număr de ore alocate	Săptămâna	Observații/ Modulul
Recapitulare și sistematizare	CS vizate de programa școlară pentru clasa a XI-a	<ul style="list-style-type: none"> Grafuri Structuri algebrice 	4	S35-S36	

*Planificarea calendaristică este realizată pentru anul școlar 2023 – 2024, care, pentru clasa a XI-a, are 36 de săptămâni de cursuri (OME nr. 3800/9.03.2023).

**Structura anului școlar 2023 - 2024 prevede o vacanță de o săptămână, în perioada 12 februarie – 3 martie 2024, la decizia inspectoratelor școlare județene/al municipiului București. În exemplul de planificare prezentat, această vacanță este stabilită în perioada 24 februarie – 3 martie 2024.

*** Programul național „Școala altfel” și Programul „Săptămâna verde” se desfășoară în perioada 11 septembrie 2023—26 aprilie 2024, în intervale de câte 5 zile consecutive lucrătoare, a căror planificare se află la decizia unității de învățământ. Derularea celor două programe se planifică în intervale de cursuri diferite.

Competențele specifice (CS) din planificare sunt de forma n, m , unde $n = \overline{1,5}$ corespunde numerotării competențelor generale din programa școlară și $m = \overline{1,2}$ corespunde conținuturilor din programa școlară, astfel:

$m = 1$ pentru *Statistică*

$m = 2$ pentru *Grafuri*

Planificarea este realizată pentru următoarea structură a anului școlar:

Interval cursuri	Perioada	Săptămânile de școală							
		1	2	3	4	5	6	7	8
Modulul 1	11 septembrie – 27 octombrie 2023 (6 săptămâni + <i>Școala Altfel_S7</i>)	1	2	3	4	5	6	7	
Modulul 2	6 noiembrie – 22 decembrie 2023 (7 săptămâni)	8	9	10	11	12	13	14	
Modulul 3	8 ianuarie – 23 februarie 2024 (7 săptămâni)	15	16	17	18	19	20	21	
Modulul 4	4 martie – 26 aprilie 2024 (7 săptămâni + <i>Săptămâna Verde_S29</i>)	22	23	24	25	26	27	28	29
Modulul 5	8 mai – 21 iunie 2024 (7 săptămâni)	30	31	32	33	34	35	36	

II.3.2. ELEMENTE DE PROIECTARE DIDACTICĂ - EXEMPLIFICARE PENTRU UNITATEA DE ÎNVĂȚARE „STATISTICĂ”

DOMENIUL DE CONȚINUT	ALGEBRĂ				
UNITATE DE ÎNVĂȚARE	Statistică				
Nr. ore alocate	8				
TITLUL LECȚIEI	CONȚINUTURI	COMPETENȚE SPECIFICE	ACTIVITĂȚI DE ÎNVĂȚARE	RESURSE	EVALUARE
Date statistice	Culegerea, clasificarea și reprezentarea datelor statistice	1.1 2.1	<p>A1. Identificarea posibilităților de culegere a datelor statistice în cadrul unor situații concrete</p> <p>A2. Utilizarea clasificării datelor statistice în situații concrete</p> <p>A3. Exprimarea prin reprezentarea cu ajutorul diagramelor a informațiilor/ relațiilor statistice dintr-o problemă concretă</p> <p>A4. Utilizarea unor diagrame statistice standard în rezolvarea unor situații concrete</p> <p>A5. Identificarea de metode diferite de rezolvare a unor probleme de statistică</p> <p>A6. Formularea unei probleme echivalente sau înrudite</p> <p>A7. Rezolvarea de probleme și situații problemă</p>	<p>Resurse procedurale: conversația, explicația, demonstrația, exercițiul, rezolvarea de probleme;</p> <p>Resurse materiale: manual, tablă, auxiliare, laptop/telefon, videoproiector, fișă de lucru</p> <p>Resurse web: Google forms; quizziz; eduboom https://mathigon.org/applications https://nces.ed.gov/nceskids/createagraph/default.aspx Elemente de organizare a datelor Lectii-Virtuale.ro - YouTube</p>	<p>Forme de evaluare: evaluare orală, evaluare asistată de calculator.</p> <p>Metode de evaluare: conversația, explicația, observarea sistematică a activității și comportamentului elevului, rezolvarea de probleme, autoevaluarea.</p> <p>Instrumente de evaluare: fișe de lucru, seturi de întrebări structurate, chestionare.</p>

Date statistice Clasificarea datelor statistice	Culegerea, clasificarea și reprezentarea datelor statistice	1.1 2.1	<p>A1. Identificarea posibilităților de clasificare a datelor statistice în cadrul unor situații concrete</p> <p>A2. Utilizarea clasificării datelor statistice în situații concrete</p> <p>A3. Exprimarea prin reprezentarea cu ajutorul diagramelor a informațiilor/ relațiilor statistice dintr-o problemă concretă</p> <p>A4. Utilizarea unor diagrame statistice standard în clasificarea și rezolvarea unor situații concrete</p> <p>A5. Identificarea de metode diferite de clasificare a unor probleme de statistică</p> <p>A6. Formularea unei probleme echivalente sau înrudite</p> <p>A7. Rezolvarea de probleme și situații problemă</p>	<p>Resurse procedurale: conversația, explicația, demonstrația, exercițiul, rezolvarea de probleme;</p> <p>Resurse materiale: manual, tablă, auxiliare, laptop/telefon, videoproiector, fișă de lucru</p> <p>Resurse web: Google forms; quizziz; eduboom</p> <p><i>Exemple:</i> Statistică matematică 1 - YouTube</p>	<p>Forme de evaluare: evaluare orală, evaluare asistată de calculator.</p> <p>Metode de evaluare: conversația, explicația, observarea sistematică a activității și comportamentului elevului, rezolvarea de probleme, autoevaluarea.</p> <p>Instrumente de evaluare: fișe de lucru, seturi de întrebări structurate, chestionare.</p>
Date statistice. Reprezentarea datelor statistice	Culegerea, clasificarea și reprezentarea datelor statistice	1.1 2.1	<p>A1. Identificarea posibilităților de reprezentare a datelor statistice în cadrul unor situații concrete</p> <p>A2. Utilizarea reprezentării datelor statistice în situații concrete</p> <p>A3. Exprimarea prin reprezentarea cu ajutorul diagramelor a informațiilor/ relațiilor statistice dintr-o problemă concretă</p> <p>A4. Utilizarea unor diagrame statistice standard în rezolvarea unor situații concrete</p> <p>A5. Identificarea de metode diferite de rezolvare a unor probleme de statistică</p>	<p>Resurse procedurale: conversația, explicația, demonstrația, exercițiul, rezolvarea de probleme.</p> <p>Resurse materiale: manual, tablă, auxiliare, laptop/telefon, videoproiector, fișă de lucru.</p> <p>Resurse web: GeoGebra; Google forms; Quizizz; Eduboom.</p> <p><i>Exemplu:</i> Statistics REVIEW 56 plays Quizizz</p>	<p>Forme de evaluare: evaluare orală, evaluare asistată de calculator.</p> <p>Metode de evaluare: conversația, explicația, observarea sistematică a activității și comportamentului elevului, rezolvarea de probleme, autoevaluarea.</p> <p>Instrumente de evaluare: fișe de lucru, seturi de întrebări structurate, chestionare.</p>

			A6. Formularea unei probleme echivalente sau înrudite A7. Rezolvarea de probleme și situații problemă	Science of Data Visualization Bar, scatter plot, line, histograms, pie, box plots, bubble chart - YouTube	
Interpretarea datelor statistice	Parametri de poziție	1.1 2.1 3.1	A1. Utilizarea formulelor standardizate pentru parametri de poziție: valoarea medie, mediana, modulul, dispersie, abatere medie, abatere medie pătratică A2. Exprimarea prin notații specifice a informațiilor/ relațiilor matematice dintr-o problemă de statistică A3. Compararea și observarea unor asemănări și deosebiri între noțiunile matematice învățate A4. Identificarea de metode diferite de rezolvare a exercițiilor și problemelor de statistică A5. Formularea unei probleme echivalente sau înrudite A6. Rezolvarea de probleme și situații problemă concrete	Resurse procedurale: conversația, explicația, demonstrația, exercițiul, rezolvarea de probleme; Resurse materiale: manual, tablă, auxiliare, laptop/telefon, videoproiector, fișă de lucru Resurse web: Google forms; quizziz; eduboom <i>Exemplu:</i> Interpretarea datelor statistice prin lectura reprezentarilor grafice - Statistica Clasa a X-a - YouTube	Evaluare scrisă formativă (<i>Quizziz, Google forms</i>); Observare curentă
Metode matematice folosite în interpretarea datelor statistice	Compararea datelor statistice utilizând media și mediana	1.1 2.1 4.1	A1. Utilizarea formulelor standardizate A2. Exprimarea specifică prin comparație a informațiilor/ relațiilor matematice dintr-o problemă de statistică A3. Compararea și observarea unor asemănări și deosebiri între medie și mediană A4. Utilizarea metodei de comparare a datelor statistice în	Resurse umane: clasă omogenă de elevi; Resurse temporale: 50 minute; Resurse oficiale: programa școlară; repere metodologice pentru aplicarea noului curriculum la clasa a XI-a, planificarea.	Forme de evaluare: evaluare orală, evaluare asistată de calculator. Metode de evaluare: conversația, explicația, observarea sistematică a activității și comportamentului elevului, rezolvarea de

			<p>rezolvarea de exerciții și probleme care utilizează media și mediana</p> <p>A5. Identificarea tipurilor de probleme care utilizează metoda de comparare a datelor statistice utilizând media și mediana</p> <p>A6. Formularea unei probleme echivalente sau înrudite</p> <p>A7. Rezolvarea de probleme și situații problemă</p>		<p>probleme, studiu de caz, autoevaluarea.</p> <p>Instrumente de evaluare: fișe de lucru, seturi de întrebări structurate, chestionare.</p>
<p>Metode matematice folosite în interpretarea datelor statistice</p>	<p>Indicatori statistici ai variabilelor cantitative</p>	<p>1.1</p> <p>2.1</p> <p>4.1</p>	<p>A1. Utilizarea formulelor standardizate</p> <p>A2. Exprimarea specifică prin indicatori statistici ai variabilelor cantitative a informațiilor/ relațiilor matematice dintr-o problemă</p> <p>A3. Utilizarea metodei de interpretare a datelor statistice în rezolvarea de exerciții și probleme care utilizează indicatori statistici ai variabilelor cantitative</p> <p>A4. Identificarea tipurilor de probleme care utilizează metoda de interpretare a datelor statistice utilizând indicatori statistici ai variabilelor cantitative</p> <p>A5. Formularea unei probleme echivalente sau înrudite</p> <p>A6. Rezolvarea de probleme și situații problemă</p>	<p>Resurse procedurale: conversația, explicația, demonstrația, exercițiul, rezolvarea de probleme;</p> <p>Resurse materiale: manual, tablă, auxiliare, laptop/telefon, videoproiector, fișă de lucru, Instrumente electronice de evaluare</p> <p>Resurse web: Google forms; quizziz; eduboom, Liveworksheets.</p> <p><i>Exemplu:</i> Indicatori statistici - YouTube Worksheets Live Worksheets</p>	<p>Forme de evaluare: evaluare orală, evaluare asistată de calculator.</p> <p>Metode de evaluare: conversația, explicația, observarea sistematică a activității și comportamentului elevului, rezolvarea de probleme, studiu de caz, autoevaluarea.</p> <p>Instrumente de evaluare: fișe de lucru, seturi de întrebări structurate, chestionare.</p>

Aplicații	-	<p>1.1 2.1 3.1 4.1 5.1</p>	<p>A1. Elaborarea unei scheme de recapitulare a metodelor folosite în interpretarea datelor statistice și analizarea metodelor optime de rezolvare a exercițiilor și problemelor</p> <p>A2. Identificarea asemănărilor și deosebirilor între parametrii de poziție</p> <p>A3. Evaluarea corectă a modurilor de alegere a unor parametri de poziție,</p> <p>A4. Determinarea metodei corecte de interpretare a datelor statistice în situații practice</p> <p>A5. Utilizarea strategiilor de rezolvare învățate în context practic-aplicativ</p> <p>A6. Transpunerea unor situații practice care necesită argumentarea demersului ales</p> <p>A7. Construirea și interpretarea unor diagrame, tabele, scheme grafice ilustrând situații cotidiene;</p>	<p>Resurse procedurale: conversația, explicația, demonstrația, exercițiul, rezolvarea de probleme;</p> <p>Resurse materiale: manual, tablă, auxiliare, laptop/telefon, videoproiector, fișă de lucru, Instrumente electronice de evaluare</p> <p>Resurse web: Google forms; quizziz; eduboom, Liveworksheets.</p> <p><i>Exemplu:</i> <u>Cum sa analizezi un grafic - Trend, nivel, zone de lichiditate - Educatie financiara - Romulus Badea - YouTube</u> <u>Statistics online worksheet for 8 Live Worksheets</u></p>	<p>Forme de evaluare: evaluare orală, evaluare asistată de calculator.</p> <p>Metode de evaluare: conversația, explicația, observarea sistematică a activității și comportamentului elevului, rezolvarea de probleme, studiu de caz, autoevaluarea.</p> <p>Instrumente de evaluare: fișe de lucru, seturi de întrebări structurate, chestionare.</p>
-----------	---	--	---	--	---

Evaluare		1.1 2.1 3.1 4.1 5.1	<p>A1. Elaborarea unei scheme a lecției de evaluare a metodelor folosite în interpretarea datelor statistice și analizarea metodelor optime de rezolvare a exercițiilor și problemelor</p> <p>A2. Identificarea asemănărilor și deosebirilor între parametrii de poziție cu rol în evaluare</p> <p>A3. Evaluarea corectă a modurilor de alegere a unor parametri de poziție, ținând cont de modul în care influențează sau nu rezultatul</p> <p>A4. Determinarea metodei corecte de interpretare a datelor statistice în situații practice</p> <p>A5. Utilizarea strategiilor de rezolvare învățate în context practic-aplicativ</p> <p>A6. Construirea și interpretarea unor diagrame, tabele, scheme grafice ilustrând situații cotidiene;</p>	<p>Resurse procedurale: demonstrația, exercițiul, rezolvarea de probleme;</p> <p>Resurse materiale: manual, tablă, auxiliare, laptop/telefon, videoproiector, fișă de lucru, Instrumente electronice de evaluare</p> <p>Resurse web: Google forms; quizziz; eduboom, Liveworksheets.</p>	<p>Forme de evaluare: evaluare orală, evaluare asistată de calculator</p> <p>Metode de evaluare: conversația, explicația, observarea sistematică a activității și comportamentului elevului, rezolvarea de probleme, studiu de caz, autoevaluarea.</p> <p>Instrumente de evaluare: fișe de lucru, seturi de întrebări structurate, chestionare.</p> <p>Tipuri de evaluare: Evaluare sumativă</p>
----------	--	---------------------------------	--	---	--

Competențe specifice:

CS.1 Identificarea unor metode de colectare și interpretare a datelor

CS.2 Interpretarea datelor statistice cu ajutorul graficelor și a diagramelor

CS.3 Utilizarea datelor statistice pentru analiza de caz

CS.4 Transpunerea în limbaj matematic prin mijloace statistice a unor probleme practice

CS.5 Caracterizarea unor situații reale prin interpretarea statistică a datelor

II.3.3. TEST INIȚIAL

TEST INIȚIAL

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Se acordă zece puncte din oficiu
- Timp de lucru 50 de minute

Încercuieți litera corespunzătoare răspunsului corect.

(15p) 1. Soluția reală a ecuației $\sqrt{2x-5} = 1$ este egală cu:

- A. 5 B. 4 C. 3 D. 1

(15p) 2. Soluția reală a ecuației $3^x + 9^x = 2$, soluția este egală cu:

- A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. 0 D. -1

(15p) 3. Numărul de submulțimi cu două elemente ale unei mulțimi cu 15 elemente, este egal cu:

- A. 210 B. 105 C. 15 D. 2

(15p) 4. Media notelor obținute de 42 de elevi la o testare este 5,75. Dacă 21 dintre elevi își măresc nota cu câte un punct fiecare, atunci media notelor va fi egală cu:

- A. 7 B. 6,5 C. 6,25 D. 6

(10p) 5. Soluția reală a ecuației $\sqrt{x+6} = \log_5 100 - \log_5 4$ este:

- A. -4 B. -2 C. 2 D. 4

(10p) 6. Probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre distincte, acesta să fie divizibil cu 5 este egală cu:

- A. $\frac{2}{9}$ B. $\frac{17}{81}$ C. $\frac{17}{90}$ D. $\frac{1}{5}$

(10p) 7. În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuație $y = ax + b$, unde a și b sunt numere reale. Dacă punctele $A(-1, -2)$ și $B(0, 3)$ aparțin dreptei d , atunci suma numerelor a și b este egală cu:

- A. -7 B. 0 C. 2 D. 8

Barem de evaluare și de notare

- Se acordă zece puncte din oficiu.
- Nu se acordă punctaje intermediare

1	C	15 p
2	C	15 p
3	B	15 p
4	C	15 p
5	B	10 p
6	B	10 p
7	D	10 p

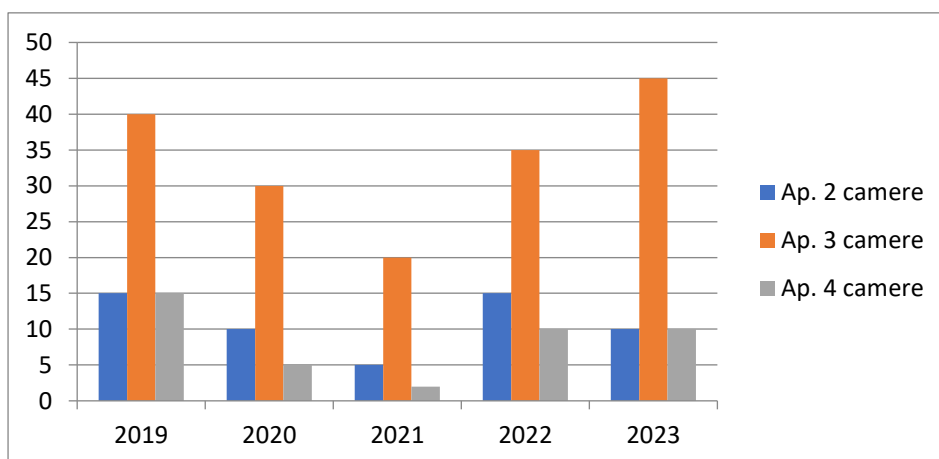
Variantă online: <https://forms.gle/H8pG5bSAU5HKCrZNA>

II.3.4. LECȚIA „DATE STATISTICE” - EXEMPLU DE ORGANIZARE A TIMPULUI DIDACTIC. EXEMPLE DE RESURSE.

CONTEXTUALIZARE:

1. Un dezvoltator imobiliar a realizat un studiu cu privire la numărul de apartamente cu 2, 3 și cu 4 camere construite într-un oraș în perioada 2019 - 2023. În diagrama de mai jos este reprezentată distribuția pe fiecare an a numărului de apartamente construite.

- Determinați anul în care au fost construite cele mai multe apartamente.
- Calculați diferența dintre numărul de apartamente cu 3 camere și numărul de apartamente cu 4 camere construite în anul 2022.
- Determinați numărul de apartamente cu 2 camere construite în perioada 2019 – 2023.



REACTUALIZAREA CUNOȘTINTELOR



Sursa: https://www.economica.net/populatia-rezidenta-a-romaniei-era-de-19-5-milioane-de-locuitori-la-1-ianuarie-2018_171204.html

➤ **Statistica** este disciplina care se ocupă cu colectarea, înregistrarea, gruparea, analiza și interpretarea datelor referitoare la un anumit fenomen precum și cu formularea unor previziuni privind comportamentul viitor al acestuia.

➤ **Populație statistică** este mulțimea pe care se realizează un studiu statistic.

➤ Numărul total de unități statistice se numește **efectivul total** al populației statistice.

Exemplu: În imaginea de mai sus, **populația statistică** reprezintă populația României la data de 1 ianuarie 2018, iar **efectivul total** este numărul 19530631.

➤ Elementele componente ale populației statistice se numesc **unități statistice** sau **indivizi**.

Exemplu: În imaginea de mai sus, **unitățile statistice (indivizii)** sunt locuitorii României la data de 1 ianuarie 2018 și cum populația este de 19530631 de locuitori, înseamnă că avem 19530631 de unități statistice (indivizi).

➤ Proprietatea sau indicatorul în funcție de care se cercetează o populație statistică se numește **caracteristică** sau **variabilă statistică**. Caracteristicile pot fi:

- **cantitative**, cele care sunt exprimate numeric și pot fi măsurate (note, înălțimi, salarii etc.)
- **calitative**, cele care nu sunt exprimate numeric și nu pot fi măsurate (profesii, culoarea ochilor, culoarea părului, calificative etc.).

Exemplu: **Caracteristicile** în funcție de care s-au realizat statisticile de mai sus sunt de tip **calitativ** și anume: gen (masculin/feminin), rezidență (urban/rural), distribuție pe regiuni de dezvoltare (Nord-Vest, Nord- Est, Centru, Vest, Sud – Vest, Sud, Sud- Est, București-Ilfov).

➤ Numărul de unități ale populației corespunzătoare unei valori a caracteristicii se numește **frecvență absolută** a acelei valori. Raportul dintre frecvența absolută a unei valori și efectivul total al populației se numește **frecvență relativă**. Frecvența relativă se poate exprima ca raport procentual.

Exemplu: Pentru toate situațiile statistice de mai sus ne sunt prezentate frecvențele relative. Dacă ne referim la studiul privind genul (feminin/masculin) observăm că 51,1% reprezintă **frecvența relativă** pentru populația feminină, iar 48,9% **frecvența relativă** pentru populația masculină. De aici putem calcula **frecvența absolută** pentru populația feminină adică 51,1% din 19530631 și obținem 9980152, iar pentru populația masculină **frecvența absolută** este 9550479 (adică 48,9% din 19530631).

➤ În cazul în care pentru efectuarea unui studiu statistic se alege din populația statistică o submulțime (**eșantion**) spunem că se efectuează un **sondaj**.

SUPORT TEORETIC

Notăm cu $x_i, i = \overline{1, p}$ valorile variabilei statistice și cu $n_i, i = \overline{1, p}$ efectivele corespunzătoare fiecărei

valori a variabilei. Media seriei statistice este numărul
$$\bar{x} = \frac{x_1 \cdot n_1 + x_2 \cdot n_2 + \dots + x_p \cdot n_p}{n_1 + n_2 + \dots + n_p}.$$

Mediana unei serii statistice reprezintă acea valoare din șirul ordonat crescător sau descrescător al valorilor variabilei, care este poziționată astfel încât împarte șirul valorilor variabilei în două subșiruri cu număr egal de termeni. Vom nota mediana cu M_e .

Modulul sau **dominanta** unei serii statistice reprezintă variabila a căreia îi corespunde cea mai mare frecvență absolută. Vom nota modulul cu M_o .

Dispersia valorilor seriei statistice este numărul
$$d = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 \cdot n_1 + (x_2 - \bar{x})^2 \cdot n_2 + \dots + (x_p - \bar{x})^2 \cdot n_p}{n_1 + n_2 + \dots + n_p}.$$

Numărul $\sigma = \sqrt{d}$ se numește **abaterea medie pătratică**.

ACTIVITATE ÎN PERECHI

Un număr de 60 de elevi din clasele a XI-a au fost evaluați la o probă sportivă. Datele de mai jos reprezintă numărul exercițiilor efectuate corect de către fiecare elev evaluat.

25	26	28	30	30	33	33	34	35	35
39	40	41	42	42	42	42	43	44	44
45	45	46	47	47	47	48	48	50	52
54	55	55	56	57	58	58	58	60	61
63	65	65	67	67	70	71	73	75	76
77	79	80	85	86	87	88	90	94	95

- a) Grupați datele acestei serii statistice pe intervalele: [25;35), [35;45), [45;55), [55;65), [65;75), [75, 85), [85;95), [95;105), [105;115]
- b) Determinați media și mediana seriei statistice prezentate.

EXEMPLIFICARE RAȚIONAMENT:

a)

Interval	Frecvența
[25,35)	8
[35,45)	12
[45,55)	11
[55,65)	10
[65,75)	7
[75,86)	5
[86,95)	6
[95,105)	1
[105,115)	0

- b) Media seriei statistice este $\bar{x} = 54,65$

Cum șirul valorilor variabilei are un număr par de termeni, mediana seriei statistice este media aritmetică a celor două valori centrale, deci $M_e = \frac{52+54}{2} = 53$

II.2.5. TEST DE EVALUARE SUMATIVĂ - UNITATEA DE ÎNVĂȚARE „STATISTICĂ”

TEST SUMATIV

- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 50 de minute .

Subiectul I

(40 de puncte)

Încercuți litera corespunzătoare răspunsului corect.

În tabelul de mai jos sunt reprezentate rezultatele obținute de elevii unei clase la testul de matematică.

Nota	3	4	5	6	7	8	9	10
Număr de elevi	2	1	3	6	1	4	5	3

(10p) 1. Numărul elevilor care au obținut cel puțin nota 6 este:

- A. 6 B. 12 C. 13 D. 19

(10p) 2. Mediana seriei statistice este:

- A. 6 B. 7 C. 8 D. 9

(10p) 3. Media notelor obținute la testul de matematică este:

- A. 6 B. 6,50 C. 7 D. 7,25

(10p) 4. Modulul seriei statistice este:

- A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

Subiectul al II-lea

(50 de puncte)

Scriveți rezolvări complete

5. Se consideră următoarea serie statistică:

x_i	2	3	6	8	10
n_i	8	6	8	11	7

(20p) a) Calculați media seriei statistice.

(20p) b) Aflați dispersia valorilor seriei statistice.

(10p) c) Arătați că abaterea media pătratică este cuprinsă între 1,06 și 1,07.

Variantă online:

https://docs.google.com/forms/d/e/1FAIpQLSc3wD0R3lncQ2Dnnru4YgKDzlopQWvJ94X4wTwKE0xp0vtDYQ/viewform?usp=sf_link

Barem de notare și evaluare

Se acordă 10p din oficiu.

Subiectul I

(40 de puncte)

1.	D	10 p
2	B	10 p
3	C	10 p
4	C	10 p

Subiectul al II-lea

(50 de puncte)

a) Media seriei este: $x = \frac{\sum_{i=1}^k x_i \cdot n_i}{\sum_{i=1}^k n_i} = \frac{2 \cdot 8 + 3 \cdot 6 + 6 \cdot 8 + 8 \cdot 11 + 10 \cdot 7}{8 + 6 + 8 + 11 + 7} =$ **10p**

$$= \frac{240}{40} = 6$$
 10p

b) Dispersia seriei este:

$$d = \frac{\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i}{\sum_{i=1}^k n_i} = \frac{(2-6)^2 \cdot 8 + (3-6)^2 \cdot 6 + (6-6)^2 \cdot 8 + (8-6)^2 \cdot 11 + (10-6)^2 \cdot 7}{8 + 6 + 8 + 11 + 7} =$$
 10p

$$= \frac{45}{40} = 1,125$$
 10p

c) Abaterea media pătratică este: $\sigma = \sqrt{d} = \sqrt{1,125}$ **5p**

Cum $1,06^2 = 1,1236$ și $1,07^2 = 1,1449$, obținem că $1,06 < \sigma < 1,07$ **5p**

III. COLECTIVUL DE AUTORI

Coordonatori

ERCULESCU Laura Maria	Centrul Național de Politici și Evaluare în Educație
DAN Steluța	Centrul Național de Politici și Evaluare în Educație

Autori

OLARU Cleopatra	Colegiul Național „Gheorghe Asachi”, Piatra Neamț
CAȚARON Adriana Ionela	Colegiul Național „Andrei Șaguna”, Brașov
LOBONȚ Dorin-Cristian	Colegiul Național Pedagogic „Mihai Eminescu”, Târgu Mureș
MAREȘ Silvia	Colegiul Național Pedagogic „Constantin Cantacuzino”, Târgoviște
ILEANA Ioana	Colegiul Național Pedagogic „Constantin Cantacuzino”, Târgoviște
COJOCNEAN Mihaela	Colegiul Național „Alexandru Papiu Ilarian”, Târgu-Mureș
NEDELCU Elena Rodica	Colegiul Național Pedagogic „Constantin Cantacuzino”, Târgoviște
CARAION Maria Raluca	Liceul Teoretic „Mihai Eminescu”, Călărași
PARASCHIV Alina	Colegiul Național „Elena Cuza”, București
MIHALCEA Mihael	Liceul Teoretic „Lucian Blaga”, București
SANDEA Claudia-Călina	Colegiul Național Pedagogic „Gheorghe Lazăr”, Cluj-Napoca
ROMILA Amalia Patricia	Colegiul Național Pedagogic „ Vasile Lupu”, Iași