

SIMULARE EXAMEN BACALAUREAT  
Matematică M<sub>șt</sub>\_nat, noiembrie 2023  
Clasa a XII-a

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Fie  $z = \frac{a-bi}{b+ai}$ , să se arate că  $|z| = 1$  pentru orice numere reale  $a$  și  $b$ .
- 5p 2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 4x^2 + 5x + 1$ . Să se determine numărul real  $a$  pentru care punctul  $A(a;a)$  este situat pe graficul funcției  $f$ .
- 5p 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $2x - 2 + \sqrt{x-1} = 0$ .
- 5p 4. Să se determine numărul de elemente ale unei mulțimi care are 60 de submulțimi ordonate cu trei elemente.
- 5p 5. Să se determine ecuația dreptei ce trece prin punctul  $A(4;-3)$  și este perpendiculară pe dreapta de ecuație  $d: 2x - y + 3 = 0$ .
- 5p 6. Să se calculeze raza cercului circumscris triunghiului ABC știind că  $AB = 15$  și  $\cos C = \frac{3}{5}$ .

Subiectul al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea  $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix}$ , unde  $x$  este un număr real.
- 5p a) Arătați că  $A(-6) - 4A(0) = -3A(2)$ .
- 5p b) Determinați matricea  $X \in M_2(\mathbb{R})$  cu proprietatea că  $A(1)X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ .
- 5p c) Determinați perechile de numere întregi  $(a,b)$ ,  $a < b$ , pentru care  $\det(A(a)A(b) + abI_2) = 4$ .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă  $x * y = 2(x-3)(y-3) + 3$ .
- 5p a) Arătați că  $2 * (-2) = 13$
- 5p b) Să se determine elementul neutru al legii.
- 5p c) Să se arate că pentru orice  $x, y \geq 3$  avem  $x * y \geq 3$ .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția  $f: (-1,1) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 1 - \sqrt{1-x^2}$ .
- 5p a) Arătați că  $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ ;
- 5p b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției în punctul de pe grafic de abscisa  $x_0 = 0$ ;
- 5p c) Studiați monotonia funcției  $f$ .
2. Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2 + 3x + \frac{1}{x}$ .
- 5p a) Arătați că  $\int_1^2 x f(x) dx = 11$ .
- 5p b) Determinați numerele reale  $a$  și  $b$  astfel încât funcția  $F: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x) = ax + bx^2 + \ln x$  este o primitivă a lui  $f$ .
- 5p c) Calculați  $\int_0^1 e^x \left( f(x) - \frac{1}{x} \right) dx$ .