

EXAMENUL NAȚIONAL PENTRU DEFINITIVARE ÎN ÎNVĂȚĂMÂNTUL PREUNIVERSITAR  
24 iulie 2024

Probă scrisă  
MATEMATICĂ

Model

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

- Se punctează orice modalitate de rezolvare corectă a cerințelor, în limita punctajului maxim corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(60 de puncte)

|  |  |                |
|--|--|----------------|
| 1.   | a) $2S_{25} = 25(a_1 + a_{25}) =$<br>$= 25(a_5 - 4r + a_{21} + 4r) = 25(a_5 + a_{21})$ , unde $r$ este rația progresiei aritmetice   | 3p             |
|  | b) $a_3 = a_1 + 2r$ , $a_{10} = a_1 + 9r$ și, cum $a_3^2 = a_1 a_{10}$ , obținem $(a_1 + 2r)^2 = a_1(a_1 + 9r)$<br>$4r^2 = 5a_1 r$ și, cum $r \neq 0$ , obținem $4r = 5a_1$<br>Cum $a_1 + a_3 + a_{10} = 134$ , obținem $a_1 = 8$ , $a_3 = 28$ și $a_{10} = 98$  | 3p<br>2p<br>3p |
|  | 2. a) $\triangle AMC \equiv \triangle DMB \Rightarrow AC = DB$ , deci $ABCD$ este trapez isoscel $\Rightarrow \sphericalangle DAM = \sphericalangle CBM$<br>Triunghiurile $AMD$ și $BMC$ sunt isoscele cu vârful în $M$ , deci $\triangle AMD \equiv \triangle BMC$ , de unde obținem $MA = MB$  | 4p<br>3p       |
| b) $ABCD$ trapez isoscel $\Rightarrow OA = OB$ și, cum $M$ este mijlocul lui $AB$ , obținem $OM \perp AB$ ; $\triangle ANB$ isoscel, punctul $M$ este mijlocul lui $AB \Rightarrow NM \perp AB$ , deci punctele $N$ , $O$ și $M$ sunt coliniare<br>$MA = MC = MB \Rightarrow MC = \frac{AB}{2}$ , deci triunghiul $ACB$ este dreptunghic în $C$<br>$\triangle NCO \sim \triangle NMB \Rightarrow \frac{CN}{MN} = \frac{OC}{BM}$ și, cum $OC = OD$ și $BM = MD$ , obținem $\frac{CN}{MN} = \frac{OD}{MD}$ | 3p<br>2p<br>3p   |                |
| 3.   | a) $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ , $x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = a$ , $x_1 x_2 x_3 = -b$<br>$\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \frac{1}{1+x_3} = \frac{3+2(x_1+x_2+x_3)+(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)}{1+(x_1+x_2+x_3)+(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)+x_1x_2x_3} = \frac{5+a}{2+a-b}$ și, cum<br>$\frac{5+a}{2+a-b} = 1$ , obținem $b = -3$  | 3p<br>4p       |
|  | b) $a+b = f(1) = (1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)$<br>Cum $x_1, x_2$ și $x_3$ sunt numere reale mai mari sau egale cu zero și $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ , rezultă $1-x_1 \geq 0$ , $1-x_2 \geq 0$ și $1-x_3 \geq 0$<br>$\sqrt[3]{(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)} \leq \frac{(1-x_1)+(1-x_2)+(1-x_3)}{3} = \frac{2}{3}$ , deci $a+b \leq \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$   | 2p<br>2p<br>4p |
|  | 4. a) $g: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , $g(x) = \ln(x+1) - x$ , $g'(x) = \frac{-x}{x+1}$ , $x \in (-1, +\infty)$ ; pentru $x \in (-1, 0]$ , $g'(x) \geq 0$ , deci funcția $g$ este crescătoare pe $(-1, 0]$ ; pentru $x \in [0, +\infty)$ , $g'(x) \leq 0$ , deci funcția $g$ este descrescătoare pe $[0, +\infty)$<br>Cum $g(0) = 0$ , rezultă $g(x) \leq 0$ , pentru orice $x \in (-1, +\infty)$ , deci $f(x) \leq x$ , pentru orice $x \in (-1, +\infty)$ | 4p<br>3p       |

|   |           |
|---|-----------|
| <p><b>b)</b> <math>0 &lt; a \leq x \leq 1 \Rightarrow \frac{f(x^{2n})}{x^n} \geq 0</math>, deci <math>I_n \geq 0</math>, pentru orice număr natural <math>n</math></p>  | <b>3p</b> |
| <p><math>f(x^{2n}) \leq x^{2n}</math>, pentru orice <math>x \in [a, 1]</math>, deci <math>I_n \leq \int_a^1 x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big _a^1 = \frac{1}{n+1}(1 - a^{n+1}) &lt; \frac{1}{n+1}</math>,</p> <p>pentru orice număr natural <math>n</math></p> | <b>3p</b> |
| <p>Cum <math>\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0</math>, obținem <math>\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0</math></p>   | <b>2p</b> |

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

|   |  |
|---|--|
| <p><i>Itemul de tip completare elaborat:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- menționarea competenței specifice evaluate</li> <li>- menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat</li> <li>- respectarea formatului itemului</li> <li>- elaborarea răspunsului așteptat (baremul de evaluare)</li> <li>- corectitudinea științifică a informației de specialitate</li> </ul>                          | <p><b>1p</b></p> <p><b>1p</b></p> <p><b>2p</b></p> <p><b>3p</b></p> <p><b>3p</b></p> |
| <p><i>Itemul de tip alegere multiplă elaborat:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- menționarea competenței specifice evaluate</li> <li>- menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat</li> <li>- respectarea formatului itemului</li> <li>- elaborarea răspunsului așteptat (baremul de evaluare)</li> <li>- corectitudinea științifică a informației de specialitate</li> </ul>                    | <p><b>1p</b></p> <p><b>1p</b></p> <p><b>2p</b></p> <p><b>3p</b></p> <p><b>3p</b></p> |
| <p><i>Itemul de tip întrebare structurată elaborat:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- menționarea competenței/competențelor specifice evaluate</li> <li>- menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat</li> <li>- respectarea formatului itemului</li> <li>- elaborarea răspunsului așteptat (baremul de evaluare)</li> <li>- corectitudinea științifică a informației de specialitate</li> </ul> | <p><b>1p</b></p> <p><b>1p</b></p> <p><b>2p</b></p> <p><b>3p</b></p> <p><b>3p</b></p> |