OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
FAZA LOCALĂ 12.02.2024
CLASA a IX-a

SUBIECTUL I (7 puncte)

Dacă x,y,z sunt numere reale pozitive astfel încât x+y+z = 2024, atunci are loc inegalitatea:

$\sqrt{2024x+yz}+\sqrt{2024y+xz}+\sqrt{2024z+xy} \le 4048$

Rezolvare

$$\sqrt{2024x+yz}=\sqrt{(x+y+z)x\ +yz}=\sqrt{x^2+xy+yz+zx}=$$
$$\sqrt{x(x+y)+z(x+y)}=\sqrt{(x+y)(x+z)}$$

Folosind inegalitatea mediilor, obținem:

$$\sqrt{2024x+yz}=\sqrt{(x+y)(x+z)} \le \frac{x+y+x+z}{2}=x+\frac{y+z}{2}.$$

Analog avem:

$\sqrt{2024y+xz} \le y+\frac{z+x}{2}$ și $\sqrt{2024z+xy} \le z+\frac{x+y}{2}$

Atunci, prin adunarea relațiilor avem:

$$\sqrt{2024x+yz}+\sqrt{2024y+xz}+\sqrt{2024z+xy} \le 2(x+y+z)=4048$$

SUBIECTUL II (7 puncte)

Să se rezolve ecuația: $\left[\frac{n-1}{2}\right]+\left[\frac{n^2-n}{3}\right]=n$, $n \in \mathbb{Z}$, unde $[\,x\,]$ este partea întreagă a nu

Rezolvare

$$\left[\frac{n-1}{2}\right]=k \Leftrightarrow k \le \frac{n-1}{2} < k+1 \Rightarrow 2k+1 \le n < 2k+3 \Rightarrow n \in$$
$$\{2k+1,\ 2k+2\}$$

i) Daca $n=2k+1,\ k \in \mathbb{Z}$, ecuația se transformă in:

$$k+\left[\frac{(2k+1)^2-(2k+1)}{3}\right]=2k+1 \Rightarrow \left[\frac{(2k+1)2k}{3}\right]=k+1 \Rightarrow$$

$$k+1 \leq \frac{2k(2k+1)}{3} < k+2 \Rightarrow 3k+3 \leq 4k^2+2k < 3k+6 \Rightarrow$$

$0 \leq 4k^2 - k - 3 < 3, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow 4k^2 - k - 3 \in \mathbb{Z}$. Avem cazurile:

- $4k^2 - k - 3 = 0 \Rightarrow k = 1 \in \mathbb{Z}$
- $4k^2 - k - 3 = 1 \Rightarrow k\ nu\ este\ întreg$
- $4k^2 - k - 3 = 2 \Rightarrow k = -1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{-1,1\} \Rightarrow n \in \{-1,3\}$

ii) Dacă $n = 2k+2,\ k \in \mathbb{Z}$, se studiază analog.

$$k + \left[\frac{(2k+2)(2k+1)}{3}\right] = 2k+2 \Rightarrow 0 \leq 4k^2+3k-4 < 3, k \in \mathbb{Z}$$

- $4k^2+3k-4 = 0 \Rightarrow nu\ convine$
- $4k^2+3k-4 = 1 \Rightarrow nu\ convine$
- $4k^2+3k-4 = 2 \Rightarrow nu\ convine \Rightarrow$ nu există soluții în acest caz.

Atunci, $n \in \{-1,3\}$.

SUBIECTUL <u>III</u> (7 puncte)

Se consideră $(a_n)_{n\geq 1}$ progresia aritmetică de rație $r=4$ și $a_1=2$, iar $(b_n)_{n\geq 1}$ progresia geometrică de rație $q=2$ și $b_1=1$.

a) Arătați că $1+2x+3x^2+...+nx^{n-1} = \dfrac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}$, pentru orice număr x real nenul. ***3p***

b) Calculați suma $S=\sum_{k=1}^{2024}\dfrac{a_k}{b_k}$. ***4p***

<u>Rezolvare</u>

a) $1+2x+3x^2+...+nx^{n-1} = (1+x+x^2+...+x^{n-1})+(x+x^2+...+x^{n-1})+(x^2+...+x^{n-1})+...+x^{n-1}$

$$=\frac{x^n-1}{x-1}+x\cdot\frac{x^{n-1}-1}{x-1}+x^2\cdot\frac{x^{n-2}-1}{x-1}+...+x^{n-1}\cdot\frac{x-1}{x-1}=$$

$$=\frac{1}{x-1}\left(x^n-1+x^n-x+x^n-x^2+...+x^n-x^{n-1}\right)=$$

$$=\frac{1}{x-1}\left(nx^n-\frac{x^n-1}{x-1}\right)=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}$$

b)

$$S=\sum_{k=1}^{2024}\frac{a_k}{b_k}=\sum_{k=1}^{2024}\frac{2+(k-1)\cdot 4}{2^{k-1}}=2\cdot\sum_{k=1}^{2024}\frac{1}{2^{k-1}}+4\cdot\sum_{k=1}^{2024}\frac{k-1}{2^{k-1}}$$

$$=2\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2024}}{1-\frac{1}{2}}+4\left[0+\frac{1}{2}+2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2}+\ldots+2023\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2023}\right]=$$

$$=4\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2024}\right]+2\cdot\left[1+2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)+\ldots+2023\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2022}\right]=$$

$$=4-4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2024}+2\cdot\frac{2023\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2024}-2024\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2023}+1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{2}}=$$

$$=4-4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2024}+8\cdot\left[2023\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2024}-2024\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2023}+1\right]=$$

$$=12-\frac{16204}{2^{2024}}$$

SUBIECTUL <u>IV</u> (7 puncte)

Se consideră triunghiul ABC și punctele $M\in(AB)$, $N\in(AC)$ și P mijlocul lui $[MN]$. Să se arate că dacă $\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CM}=2\overrightarrow{PA}$, atunci $\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CM}$ sunt mediane.

<u>Rezolvare</u>

$\overline{BN}=\overline{BA}+\overline{AN}$ și $\overline{CM}=\overline{CA}+\overline{AM}\Rightarrow 2\overline{PA}=\overline{BN}+\overline{CM}=\overline{BA}+\overline{CA}+\overline{AN}+\overline{AM}=\overline{BA}+\overline{CA}+2\overline{AP}\Rightarrow\overline{BA}+\overline{CA}=4\overline{PA}.$ Consider Q mijlocul lui $[BC]\Rightarrow 2\overline{AQ}=\overline{AB}+\overline{AC}\Rightarrow 2\overline{QA}=4\overline{PA}\Rightarrow\overline{AQ}=2\overline{AP}$

Atunci, punctele A,P,Q sunt coliniare și P este mijlocul lui AQ . Dar P este mijlocul lui MN => ANQM este paralelogram. Atunci MQ este linie mijlocie $\Rightarrow M$ este mijlocul lui AB și CM este mediană. Analog, și BN este mediană.