BAREM DE CORECTARE SI NOTARE
Clasa a X- a
Olimpiada de matematică - Faza locală 12.02.2024

1. Din inegalitatea mediilor avem $m_h(a,b) \leq m_g(a,b) \Rightarrow \frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab}$ (1p)
   Avem $a,b \in (0,1)$, deci $\log_a \frac{2ab}{a+b} \geq \log_a \sqrt{ab}$ și $\log_b \frac{2ab}{a+b} \geq \log_b \sqrt{ab}$ (2p)
   Cum $a,b \in (0,1)$ atunci $\sqrt{ab} \in (0,1) \Rightarrow \log_a \sqrt{ab} > 0$, $\log_b \sqrt{ab} > 0$ (1p)
   Rezultă $\log_a \frac{2ab}{a+b} \cdot \log_b \frac{2ab}{a+b} \geq \log_a \sqrt{ab} \cdot \log_b \sqrt{ab}$ (1p)
   $\log_a \sqrt{ab} \cdot \log_b \sqrt{ab} = \frac{1}{2}\log_a ab \cdot \frac{1}{2}\log_b ab = \frac{1}{4}(1+\log_a b)(1+\log_b a)$ (1p)
   $\frac{1}{4}(1+\log_a b)(1+\log_b a) = \frac{2+\log_a b+\log_b a}{4} \geq 1$, $(\log_a b + \log_b a > 2)$ (1p)

2. Din inegalitatea mediilor avem $m_a(a,b,c) \geq m_g(a,b,c)$ avem că
   $\frac{\log_3 5+\log_5 7+\log_7 3}{3} \geq \sqrt[3]{\log_3 5 \cdot \log_5 7 \cdot \log_7 3} = 1$.
   Fie $x = \log_3 5 + \log_5 7 + \log_7 3$
   rezultă $x = \log_3 5 + \log_5 7 + \log_7 3 \geq 3$ (2p)
   Folosim inegalitățile $5 < 3\sqrt{3}$ *și* $7 < 5\sqrt{5}$ (1p)
   Obținem $\log_3 5 + \log_5 7 + \log_7 3 < \log_3 3\sqrt{3} + \log_5 5\sqrt{5} + \log_7 7$ (2p)
   $x = \log_3 5 + \log_5 7 + \log_7 3 < \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + 1 = 4$ (1p)
   Rezultă că $3 \leq \log_3 5+\log_5 7 + \log_7 3 < 4$, deci $[x] = 3$ (1p)

3. Dacă $x < 0$ *avem* $625^x < 1$, $5^{\frac{1}{x}} < 1$, $81^x < 1$, $3^{\frac{1}{x}} < 1$ *avem* $\left(625^x + 5^{\frac{1}{x}}\right)\left(81^x + 3^{\frac{1}{x}}\right) < 4$
   Folosim inegalitatea mediilor $m_a(a,b) \geq m_g(a,b)$ *rezultă*
   $\frac{1}{2}\left(625^x + 5^{\frac{1}{x}}\right) \geq \sqrt{625^x 5^{\frac{1}{x}}} = 5^{2x}5^{\frac{1}{2x}}$, $\frac{1}{2}\left(81^x + 3^{\frac{1}{x}}\right) \geq \sqrt{81^x 3^{\frac{1}{x}}} = 3^{2x}3^{\frac{1}{2x}}$, (3p)
   $\frac{1}{2}\left(625^x + 5^{\frac{1}{x}}\right) \cdot \frac{1}{2}\left(81^x + 3^{\frac{1}{x}}\right) \geq 5^{2x}5^{\frac{1}{2x}} \cdot 3^{2x}3^{\frac{1}{2x}}$ (2p)
   Obținem $\left(625^x + 5^{\frac{1}{x}}\right)\left(81^x + 3^{\frac{1}{x}}\right) \geq 4 \cdot 15^{2x} \cdot 15^{\frac{1}{2x}} = 4 \cdot 15^{2x+\frac{1}{2x}} \geq 4 \cdot 15^2 = 900$ (1p)
   Ecuația $\left(625^x + 5^{\frac{1}{x}}\right)\left(81^x + 3^{\frac{1}{x}}\right) = 900 = 4 \cdot 15^2 \Leftrightarrow 2x + \frac{1}{2x} = 2 \Leftrightarrow (2x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.
   (1p)

4. Fie triunghiul $A_1A_2A_3$ în reperul xOy astfel încât O este centrul cercului circumscris triunghiului.
   Din proprietățile $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$ și $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, obținem
   $|z_1 + z_2|^2 + |z_2 + z_3|^2 + |z_3 + z_1|^2$
   $= (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) + (z_2 + z_3)(\overline{z_2} + \overline{z_3}) + (z_3 + z_1)(\overline{z_3} + \overline{z_1})$ (2p)
   Obținem $|z_1|^2 + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} + |z_2|^2 + z_2\overline{z_3} + z_3\overline{z_2} + z_3\overline{z_3} + |z_3|^2 + z_3\overline{z_1} + z_1\overline{z_3} + z_1\overline{z_1}$
   $=3$, deci $3 + z_1(\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3}) + z_2(\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3}) + z_3(\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3}) = 3$ (2p)
   Obținem $(z_1 + z_2 + z_3)(\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3}) = 0 \Rightarrow |z_1 + z_2 + z_3|^2 = 0$
   deci $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ (1p)

Folosind relația lui Sylvester avem $z_H = z_1 + z_2 + z_3$ unde H este ortocentrul triunghiului, obținem că $z_H = 0$ (1p)

Din O = H rezulta că triunghiul $A_1A_2A_3$ este echilateral (1p)

- *Nu se acorda puncte din oficiu.*
- *Pentru orice solutie corecta, diferita de cea din barem, se acorda punctajul corespunzator.*
- *Fiecare exercitiu este punctat de la 0 la 7.*