OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
FAZA LOCALĂ 12.02.2024
CLASA a XI-a

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

SUBIECTUL I (7 puncte)

Pe mulțimea A = $[2,4]$ definim legea de compoziție asociativă $x \circ y = \frac{3xy-5x-5y+10}{2xy-4x-4y+9}$, x, y $\in [2,4]$

și funcția f: A→ ℝ, $f(x) = \frac{5-2x}{x-1}$.

a) Determinați elementele simetrizabile ale legii; 2p
b) Arătați că Im $f = [-1,1]$ și că $f(x \circ y) = f(x) \cdot f(y)$, $(\forall) x, y \in A$; 3p
c) Calculați $\frac{11}{5} \circ \frac{17}{8} \circ \frac{23}{11} \circ ... \circ \frac{6n+5}{3n+2}$, unde n$\in N, n \geq 2$. 2p

a) Se determină elementul neutru e = 2 $\in A$……………………………………………1p
Se arată ca singurele elemente simetrizabile sunt 2 și 4……………………………………1p
b) f derivabilă, deci continuă și $f'(x) = \frac{-3}{(x-1)^2} < 0$ ……………………………………1p
⇒ f este strict descrescatoare pe [2,4] ⇒ Imf = [f(4),f(2)] = [-1,1]…………………1p
Se verifică că f(x $\circ y$) = f(x) · f(y), $(\forall) x, y \in A$ ………………………………1p
c) Se arată că f ($x_1 \circ x_2 \circ ... \circ x_n$) = f($x_1$) · f($x_2$) · … f($x_n$)
f $\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{6k+5}{3k+2}\right) = \prod_{k=1}^{n} f\left(\frac{6k+5}{3k+2}\right) = \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{n+1}$……………………………………1p
Se obține că $f\left(\frac{5n+6}{2n+3}\right) = \frac{1}{n+1} \Rightarrow \frac{11}{5} \circ \frac{17}{8} \circ \frac{23}{11} \circ ... \circ \frac{6n+5}{3n+2} = \frac{5n+6}{2n+3}$ ………………………1p

SUBIECTUL II (7 puncte)

Fie (G, ·) un grup și f: G → G cu f (x) = x^2. Dacă f este morfism atunci, să se demonstreze că (G, ·) este grup abelian.

Cum f este morfism, avem că f (x · y) = f (x) · f(y) pentru orice x,y ∈ G.............................2p
Se obține: $(xy)^2 = x^2y^2$ pentru orice x,y ∈ G..2p
Avem că xyxy = xxyy pentru orice x,y ∈ G...1p
Relația devine yx = xy pentru orice x,y ∈ G..2p

SUBIECTUL III (7 puncte)

Se consideră funcţia $f:\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\sin x+\cos x}{\cos^2 x}\cdot e^x$. Dacă F este o primitivă a funcţiei f cu condiţia $f(0)=1$, calculaţi $F\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

$F(x)=\int\frac{\sin x+\cos x}{\cos^2 x}\cdot e^x dx=\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}\cdot e^x dx+\int\frac{1}{\cos x}\cdot e^x dx=$ 1p

$\int\left(\frac{1}{\cos x}\right)'\cdot e^x dx+\int\frac{1}{\cos x}\cdot e^x dx=$ 2p

$=\frac{1}{\cos x}\cdot e^x-\int\frac{1}{\cos x}\cdot e^x dx+\int\frac{1}{\cos x}\cdot e^x dx$ 1p

$\Rightarrow F(x)=\frac{1}{\cos x}\cdot e^x+k$ ……………..………………………………………………………........1p

Dar $F(0)=1\Rightarrow k=0$. $Atunci, F(x)=\frac{e^x}{\cos x}$ ………..……………...……………………..……..1p

$F\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}e^{\frac{\pi}{6}}$ ……………………...……………………………...…………………..……..1p

SUBIECTUL IV (7 puncte)

Se consideră funcţia $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$ continuă şi descrescătoare, astfel încât $f(\pi)=0$ şi fie F o primitivă a sa. Demonstraţi că: $\int_0^{2\pi}F(x)\cos x\ dx\le 0$

$I=\int_0^{2\pi}F(x)\cdot\cos x\ dx=\int_0^{2\pi}F(x)\cdot(\sin x)'dx=F(x)\cdot\sin x\ \Big|_0^{2\pi}-$

$-\int_0^{2\pi}f(x)\cdot\sin x\ dx=-\int_0^{2\pi}f(x)\sin x\ dx$...3p

Dacă $x\in[0,\pi]\Rightarrow f(x)\ge f(\pi)=0$, iar dacă $x\in[\pi,2\pi]$, atunci $f(x)\le f(x)=0$

(f descrescătoare pe $[0,2\pi]$) ………………...……………………………………...……...........2p

Atunci, cum $\sin x\ge 0$ pe $[0,\pi]$ şi $\sin x\le 0$ e $[\pi,2\pi]$ rezultă că $I\le 0$...2p