OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
AN ȘCOLAR 2023 – 2024
ETAPA LOCALĂ
10.02.2024
CLASA A VII-A

BAREM

Subiectul I

Din inegalitatea mediilor rezultă $\sqrt{a} \leq \frac{a+1}{2}$……………………………………………………………..……..1p

Atunci $\sqrt{a+2} \leq \frac{a+3}{2}$, $\sqrt{a+3} \leq \frac{a+4}{2}$, … $\sqrt{a+2024} \leq \frac{a+2025}{2}$…………………………………………..…...2p

$\sqrt{a+2} + \sqrt{a+3} + \sqrt{a+4} \ldots \ldots . + \sqrt{a+2024} \leq \frac{a+3}{2} + \frac{a+4}{2} \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots . . + \frac{a+2025}{2}$……………….....……1p

$\frac{a+3}{2} + \frac{a+4}{2} \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots . . + \frac{a+2025}{2} = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \ldots . + \frac{a}{2} + \frac{3+4+\cdots \ldots 2025}{2}$…………………………………………...………2p

$\sqrt{a+2} + \sqrt{a+3} + \sqrt{a+4} \ldots \ldots . + \sqrt{a+2024} \leq \frac{2023(a+1014)}{2}$…………………………………………………………1p

Subiectul II

a) X=$\left|1-\sqrt{2}\right| + \left|\sqrt{2}-\sqrt{3}\right| + \cdots . + \left|\sqrt{2023}-\sqrt{2024}\right| =$

$\sqrt{2} - 1 + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{2024} - \sqrt{2023} = \sqrt{2024} - 1$……………………………………………..…….1p

Y=$\sqrt{2024} - 1$, ………………………………………………..……………………………………..………...1p

Y=X…………………………………………………………………………………………………..………1p

b) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{5^2}+\sqrt{5^3}\ldots\ldots\ldots+\sqrt{5^{200}}}{6\sqrt{5}+30} = \frac{(\sqrt{5}+5)+5(\sqrt{5}+5)+\cdots+5^{99}(\sqrt{5}+5)}{6(\sqrt{5}+5)}$……………..…………………………2p

$\frac{1++5+5^2+\cdots+5^{99}}{6} = \frac{(1+5)+5^2(1+5)+\cdots+5^{98}(1+5)}{6} \in N$……………………………......……………2p

Subiectul III

a) EC este bisectoarea unghiului C, avem $d(E,AC) = d(E,BC) \Rightarrow (AE) = (EF)$……………………..1p
$\sphericalangle(AEG) = 90^0 - \sphericalangle(ACE), \sphericalangle(AGE) = \sphericalangle(CGD) = 90^0 - \sphericalangle(GCD)$, așadar $\sphericalangle(AEG) \equiv \sphericalangle(AGE)$, de unde se obține că ΔAEG este isoscel, deci $(AE) = (AG)$ și $(AG) = (EF)$………………………………….2p
Cum $AG \perp BC, EF \perp BC \Rightarrow AG \parallel EF$, deci patrulaterul $AEFG$ este romb…………………………….1p

b) $AEFG$ romb $\Rightarrow CE \perp AF$, deci CE bisectoare și înălțime în ΔAFC, se obține că ΔAFC este isoscel, $\sphericalangle(ACF) = 60^0$, așadar ΔAFC este echilateral………………………………………………………….1p
În ΔAFC, înălțimile AD și CE sunt și mediane, deci G este centrul de greutate al triunghiului, de unde

rezultă că $AG=\frac{2}{3}AD$. Cum $\sphericalangle(B)=30^0 \Rightarrow FD=\frac{1}{2}FC=\frac{1}{4}BC$...1p

$A_{AEFG}=AG\cdot FD=\frac{2}{3}AD\cdot\frac{1}{4}BC=\frac{1}{3}\cdot\frac{AD\cdot BC}{2}=\frac{1}{3}A_{ABC}$ 1p

Subiectul IV

a) MN=linie mijlocie în ΔBOC⇒MN=$\frac{BC}{2}$..1p

Cum MP≡MN⇒MP=$\frac{BC}{2}=\frac{AD}{2}$⇒ MP mediană în ΔDMA⇒$\widehat{DMA}=90^0$...1p

DM este înălțime și mediană în ΔDOC⇒ΔDOC isoscel⇒ DO≡DC...1p

Dar trapezul ABCD este isoscel⇒ DO≡OC⇒ΔDOC echilateral⇒$\widehat{AOD}=120^0$..1p

b) $\widehat{PMN}\equiv\widehat{PMA}+\widehat{AMN}$. Cum MN//BC⇒ $\widehat{AMN}\equiv\widehat{ACB}\equiv\widehat{BDA}$...1p

MP≡ PA⇒$\widehat{PMA}\equiv\widehat{PAM}$. În ΔAOD, $\widehat{PAM}+\widehat{ADB}=60^0$⇒$\widehat{PMN}=60^0$..2p

Str. Oituz, nr. 24, Bacău
600266, Bacău
Tel: +40 (0)754033700
Fax: +40 (0)234 571038
office@e-isjbacau.ro
www.isjbacau.ro