

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
AN ȘCOLAR 2023 – 2024
ETAPA LOCALĂ
10.02.2024

CLASA A VIII -A

BAREM

Subiectul I

Determinați numerele întregi x știind că numărul $\sqrt{x^2 + 2x + 4}$ este rațional.

Rezolvare

Notăm $y = \sqrt{x^2 + 2x + 4}$.

$(x + 1)^2 + 3 = y^2$, deci $(y + x + 1)(y - x - 1) = 3$ 1p

Cum $x \in \mathbb{Z}$ și $y \in \mathbb{Q}$ rezultă $y \in \mathbb{N}$ 1p

Cum $x \in \mathbb{Z}$ și $y \in \mathbb{N}$ rezultă $(y + x + 1), (y - x - 1) \in \mathbb{Z}$ și sunt divizori ai lui 3 1p

Din $(y + x + 1) = 1$ și $(y - x - 1) = 3$ rezultă $y=2$ și $x=-2$ 1p

Din $(y + x + 1) = 3$ și $(y - x - 1) = 1$ rezultă $y=2$ și $x=0$ 1p

Din $(y + x + 1) = -1$ și $(y - x - 1) = -3$ sau $(y + x + 1) = -3$ și $(y - x - 1) = -1$
rezultă $y=-2$, nu convine 1p

Finalizare $x \in \{-2, 0\}$ 1p

Subiectul II

Se consideră expresia $E(a, b) = a^2 + b^2 + 8a - 2b + 22$, unde a și b sunt numere reale.

a) Determinați valoarea minimă a expresiei.

b) Arătați că, dacă $E(a, b) = 6$, atunci $a^2 \geq b^2 + 5$.

Rezolvare

a) $E(a, b) = (a+4)^2 + (b-1)^2 + 5 \geq 5$, pentru orice numere reale a și b 2p

cum $E(-4, 1) = 5$, obținem că valoarea minimă a expresiei este egală cu 5 1p

b) $E(a, b) = 6 \Rightarrow (a+4)^2 + (b-1)^2 = 1 \Rightarrow (a+4)^2 \leq 1$ și $(b-1)^2 \leq 1$ 1p

$(a+4)^2 \leq 1 \Leftrightarrow a \in [-5, -3]$, $(b-1)^2 \leq 1 \Leftrightarrow b \in [0, 2]$ 2p

Cum $a^2 \in [9, 25]$ și $b^2 \in [0, 4]$, rezultă că $a^2 \geq b^2 + 5$ 1p

Subiectul III

Considerăm tetraedrul regulat $ABCD$. Punctele M, N, P și R aparțin segmentelor AB, BC, CD , respectiv AD , astfel încât $AM = BN = CP = DR = AB/3$.

- Demonstrează că unghiul dintre dreptele MN și AC are măsura de 30° .
- Punctul O este mijlocul segmentului MP . Demonstrează că dreapta MP este perpendiculară pe planul (NOR) .

Rezolvare

- Notăm cu X mijlocul BC . Din $\frac{BM}{AM} = \frac{BN}{NX} = 2$ rezultă $MN \parallel AX$ 2p
 $\sphericalangle(MN, AC) = \sphericalangle(AX, AC) = 30^\circ$ 1p
- $\triangle MBN \equiv \triangle NCP \Rightarrow \triangle MNP$ isoscel $\Rightarrow NO$ este mediană, deci înălțime2p
 $\triangle PDR \equiv \triangle RAM \Rightarrow \triangle MPR$ isoscel $\Rightarrow RO$ este mediană, deci înălțime1p
 $MP \perp NO$ și $MP \perp RO$ deci $MP \perp (NOR)$1p

Subiectul IV

Fie paralelipipedul dreptunghic $ABCD A' B' C' D'$ cu $AB = 2BC$. Notăm mijlocul segmentului AB cu N și cu P , punctul de intersecție al dreptelor CN și BD . Se consideră punctul M pe muchia BB' astfel încât perimetrul triunghiului AMC' să aibă cea mai mică valoare. Demonstrați că dreapta MP este paralelă cu planul $(B'AC)$.

Rezolvare

Fie $\{O\} = AC \cap BD$.

Punctul P este centrul de greutate al triunghiului ABC de unde rezultă că $\frac{PB}{BO} = \frac{2}{3}$ 2p

Pe desfășurarea în plan a paralelipipedului, în dreptunghiul $ACC'A'$, minimul $AM + MC'$ se realizează când punctele A, M și C' sunt coliniare.2p

Pe desfășurare avem $MB \parallel CC' \Rightarrow \triangle ABM \sim \triangle ACC' \Rightarrow \frac{BM}{CC'} = \frac{AB}{AC} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{BM}{BB'} = \frac{2}{3}$ 1p

În triunghiul $B'BO$ avem $\frac{PB}{BO} = \frac{BM}{BB'} \Rightarrow MP \parallel OB'$ și cum $OB' \subset (B'AC)$ obținem $MP \parallel (B'AC)$ 2p