

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
AN ȘCOLAR 2023 – 2024
ETAPA LOCALĂ
10.02.2024
CLASA A VII -A

Subiectul I

Fie a un număr real pozitiv. Arătați că:

$$\sqrt{a+2} + \sqrt{a+3} + \sqrt{a+4} + \dots + \sqrt{a+2024} \leq \frac{2023(a+1014)}{2}$$

Subiectul II

a) Se consideră numerele:

$$X = \sqrt{(1-\sqrt{2})^2} + \sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{4})^2} + \dots + \sqrt{(\sqrt{2023}-\sqrt{2024})^2}$$

$$Y = \sqrt{2008 + \sqrt{240 + \sqrt{252 + \sqrt{1+15}}}} - \sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{(-1)^{2024}}}}}. \text{ Comparați numerele } X \text{ și } Y.$$

b) Să se arate că numărul $A = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{5^2} + \sqrt{5^3} + \dots + \sqrt{5^{200}}}{6\sqrt{5} + 30}$ este natural.

Subiectul III

Fie ABC un triunghi dreptunghic, $\sphericalangle(A) = 90^\circ$, $AD \perp BC, D \in (BC)$. Bisectoarea unghiului ACB intersectează dreapta AD în punctul G și latura AB în punctul E . Se notează cu F piciorul perpendicularei din E pe latura BC .

- Arătați că patrulaterul $AEFG$ este romb.
- Dacă triunghiul AEG este echilateral, aflați raportul dintre aria patrulaterului $AEFG$ și aria triunghiului ABC .

Subiectul IV

Fie $ABCD$ un trapez isoscel cu $AB \parallel CD$, $AB > CD$ și $AC \cap BD = \{O\}$. Punctele M, N, P sunt mijloacele segmentelor OC, OB , respective AD , iar $MN \equiv MP$.

- Determinați măsura unghiului AOD ;
- Arătați că măsura unghiului PMN este de 60° .

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect este notat cu 7 puncte.

Timp de lucru: 3 ore.