Barem clasa a X-a
(OLM 2024-etapa locală)

Problema I. (7 puncte)

a) Fie $z = x + yi, x, y \in \mathbb{R}$. Din $|z| = \sqrt{5} \Rightarrow x^2 + y^2 = 5$. ....**(1p)**

Avem $\frac{z+5}{z} = 1 + \frac{5}{z} = 1 + \frac{5}{x+yi} = 1 + \frac{5(x-yi)}{x^2+y^2} = 1 + \frac{5\bar{z}}{5} = 1 + \bar{z}$. ....**(2p)**

b) Vom folosi inegalitatea: $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ....**(1p)**

$\left|(2+i)z^3 - iz\sqrt{5}\right| \le \left|(2+i)z^3\right| + \left|iz\sqrt{5}\right| =$ ....**(1p)**

$= |2+i|\left|z^3\right| + |i||z|\sqrt{5} = \sqrt{5}|z|^3 + |z|\sqrt{5} = \sqrt{5}(|z|^3 + |z|) \le \sqrt{5}(\sqrt{5}^3 + \sqrt{5}) = \sqrt{5} \cdot 6\sqrt{5} = 30$ ....**(2p)**

Problema II. (7 puncte)

Fie $x = 1 + \log_a b + \log_a c = \log_a abc$, $y = 1 + \log_b a + \log_b c = \log_b abc$ și $z = 1 + \log_c a + \log_c b = \log_c abc$.

Avem de arătat că $xyz \ge 27$ ....**(2p)**

Din formula de schimbare a bazei obținem: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \log_{abc} a + \log_{abc} b + \log_{abc} c = \log_{abc} abc = 1$..................**(3p)**

Din inegalitatea $m_g \ge m_h$ obținem: $\sqrt[3]{xyz} \ge \frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} = 3$, de unde, $xyz \ge 3^3 = 27$ ....**(2p)**

Problema III. (7 puncte)

Condiții de existență: $x-1>0,\ x+1>0,\ x>0 \Leftrightarrow x>1 \Leftrightarrow x \in (1,\infty)$ ....**(1p)**

Dacă $x \in (1,2] \Rightarrow \ln(x-1) \le 0 \Rightarrow \ln(x-1)\ln(x+1) \le 0$ și $\ln^2 x > 0$, inegalitatea având loc în acest caz................**(2p)**

Dacă $x \in (2,\infty)$, aplicăm inegalitatea mediilor și obținem

$$\ln(x-1)\ln(x+1) < \left(\frac{\ln(x-1)+\ln(x+1)}{2}\right)^2 = \left(\frac{\ln(x^2-1)}{2}\right)^2 < \left(\frac{\ln x^2}{2}\right)^2 = \left(\frac{2\ln x}{2}\right)^2 = (\ln x)^2$$ ....**(3p)**

Deci inegalitatea are loc dacă și numai dacă $x \in (1,\infty)$ ....**(1p)**

Problema IV. (7 puncte)

Afixul punctului M_0 este 1, al lui M_1 este $\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$, iar al lui M_2 este $\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$ ....**(1p)**

Avem $MM_2 = \left|\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} - \cos t - i\sin t\right| = \left|\left(-\frac{1}{2} - \cos t\right) + i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin t\right)\right| = \sqrt{2 + \cos t + \sqrt{3}\sin t} =$

$= \sqrt{2 + 2\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos t + \sin\frac{\pi}{3}\sin t\right)} = \sqrt{2 + 2\cos\left(\frac{\pi}{3} - t\right)} = \sqrt{4\cos^2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{t}{2}\right)} = 2\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{t}{2}\right)$ ....**(2p)**

$MM_1 = \left|\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} - \cos t - i\sin t\right| = \left|\left(-\frac{1}{2} - \cos t\right) + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin t\right)\right| = \sqrt{2 + \cos t - \sqrt{3}\sin t} = \sqrt{2 + 2\cos\left(\frac{\pi}{3} + t\right)} = 2\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{t}{2}\right)$ ....**(2p)**

$MM_0 = \left|\cos t + i\sin t - 1\right| = \sqrt{\left(\cos t - 1\right)^2 + \sin^2 t} = \sqrt{2 - 2\cos t} = \sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}} = 2\sin\frac{t}{2}$ ....**(1p)**

Egalitatea de demonstrat $MM_2 = MM_0 + MM_1$, se scrie:

$2\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{t}{2}\right) = 2\sin\frac{t}{2} + 2\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{t}{2}\right) \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{t}{2}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{t}{2}\right) = \sin\frac{t}{2} \Leftrightarrow 2\sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{t}{2} = \sin\frac{t}{2}.$

Finalizare...**(1p)**