Barem clasa a XI-a
(OLM 2024-etapa locală)

Problema I. (7 puncte)

Descompunând determinantul după linia întâi, avem

$\Delta_n = 7\Delta_{n-1} - 4\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & 7 & 4 & 0 \dots 0 \\ 0 & 3 & 7 & 4 \dots 0 \\ & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots 0 \end{vmatrix}$ ....(1p)

$\Delta_n = 7\Delta_{n-1} - 12\Delta_{n-2}, n \in \mathbb{N}, n \geq 3$....................(1p)

Ecuația caracteristică atașată recurenței este $r^2 - 7r + 12 = 0$ cu soluțiile $r_1 = 3$ și $r_1 = 4$....................(1p)

Atunci $\Delta_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n = c_1 4^n + c_2 3^n$, unde c_1, c_2 se determină din condițiile inițiale....................(1p)

Pentru $n = 1$ avem $\Delta_1 = 4c_1 + 3c_2 \Rightarrow 4c_1 + 3c_2 = 7$....................(1p)

Pentru $n = 2$ avem $\Delta_2 = 16c_1 + 9c_2 \Rightarrow 16c_1 + 9c_2 = 37$....................(1p)

Obținem $c_1 = 4$ și $c_2 = -3$, de unde $\Delta_n = 4^{n+1} - 3^{n+1}$....................(1p)

Problema II. (7 puncte)

Matricea A se scrie $A = 2I_3 + B$, unde $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ....(1p)

Observăm că $B^n = B, \forall n \geq 1$....................(1p)

Atunci $A^n = (B + 2I_3)^n = B^n + C_n^1 B^{n-1} 2I_3 + C_n^2 B^{n-2} 2^2 I_3 + \dots + 2^n I_3 =$....................(1p)

$= B + 2C_n^1 B + \dots + C_n^{n-1} 2^{n-1} B + 2^n I_3 = (1 + 2C_n^1 + \dots + C_n^{n-1} 2^{n-1})B + 2^n I_3 =$....................(1p)

$= ((1+2)^n - 2^n)B + 2^n I_3 = (3^n - 2^n)B + 2^n I_3 = \begin{pmatrix} 3^n & 3^n - 2^n & 3^n - 2^n \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$....................(1p)

$tr(A^n) = 2^{n+1} + 3^n$....................(1p)

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{tr(A^n)}{tr(A^{n+1})} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}+3^n}{2^{n+2}+3^{n+1}} = \frac{1}{3}$....................(1p)

Problema III. (7 puncte)

Din inegalitatea mediilor se obține $x_{n+1} = \dfrac{x_n + x_n + \frac{27}{x_n^2}}{3} \geq \sqrt[3]{x_n \cdot x_n \cdot \frac{27}{x_n^2}} = 3 \Rightarrow x_n \geq 3$ ....(2p)

De asemenea, $3(x_{n+1} - x_n) = \dfrac{27}{x_n^{\ 2}} - x_n = \dfrac{27 - x_n^{\ 3}}{x_n^{\ 2}} \leq 0 \Rightarrow \quad x_{n+1} - x_n \leq 0, \forall n \in \mathbf{N}, n \geq 2.$ ....(2p)

Așadar șirul este descrescător și mărginit inferior adică este un șir convergent....................(1p)

Prin trecerea la limită în relația de recurență se obține $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 3$....................(2p)

Problema IV. (7 puncte)

Avem $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^{2024} - \sin^{2024} x}{x^{2026}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x - \sin x)(x^{2023} + x^{2022}\sin x + \dots + \sin^{2023} x)}{x^{2026}} =$ ....(2p)

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x-\sin x)}{x^3}\left(\dfrac{x^{2023}}{x^{2023}} + \dfrac{x^{2022}\sin x}{x^{2023}} + \dots + \dfrac{\sin^{2023} x}{x^{2023}}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^3}\left(1 + \dfrac{\sin x}{x} + \dfrac{\sin^2 x}{x^2} + \dots + \dfrac{\sin^{2023} x}{x^{2023}}\right) = 2024 \cdot \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x - \sin x)}{x^3}$ ......(2p)

Notăm $l=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)}{x^3}$. Dacă facem substituţia $x=3y$, obţinem:

$$l=\lim_{y\to 0}\frac{3y-\sin 3y}{27y^3}=\lim_{y\to 0}\frac{3y-3\sin y+4\sin^3 y}{27y^3}=\lim_{y\to 0}\frac{3(y-\sin y)}{27y^3}+\frac{4}{27}\lim_{y\to 0}\frac{\sin^3 y}{y^3}=\frac{1}{9}l+\frac{4}{27},$$

de unde $l=\frac{1}{6}$, prin urmare limita cerută este $2024\cdot\frac{1}{6}=\frac{1012}{3}$.……………………..................................**(3p)**