Barem clasa a XII-a
(OLM 2024-etapa locală)

Problema I. (7 puncte)

a) Observăm că $x * y = (x+1)\cdot(y+1)-1, \forall x, y \in \mathbf{R}$.

$(x*y)*z = (x+1)\cdot(y+1)\cdot(z+1)-1$ și $x*(y*z) = (x+1)\cdot(y+1)\cdot(z+1)-1$ și finalizare........................(**2p**)

b) $f(x*y) = f(x+y+xy) = x+y+xy+1$..(**1p**)

$f(x)\cdot f(y) = x+y+xy+1$ și finalizare ....(**1p**)

Se arată prin inducție că $a_1 * a_2 * \cdots * a_n = (a_1+1)\cdot(a_2+1)\cdot\ldots\cdot(a_n+1)-1$..(**2p**)

așadar $1*\frac{1}{2}*\frac{1}{3}*\cdots*\frac{1}{2008} = 2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{2009}{2008}-1 = 2009-1 = 2008$..(**1p**)

Problema II. (7 puncte)

Avem $a^2 = (ab)^2 \Rightarrow a^2 = abab \Rightarrow a = bab$ ....(**1p**)

și $b^2 = (ab)^2 \Rightarrow b^2 = abab \Rightarrow b = aba$.. (**1p**)

Atunci $ab = (bab)(aba) = b(aba)ba = b^3a$.. (**1p**)

În relația $ab = b^3a$, înmulțim la dreapta cu a și obținem $aba = b^3a^2$..(**1p**)

Atunci $b = b^3a^2$ și $b^2a^2 = e$,.. (**1p**)

de unde $a^4 = e$ și $b^4 = e$.. (**1p**)

Prin urmare $a^{2024} = e$ și $b^{2020} = e$.. (**1p**)

Problema III. (7 puncte)

$\sqrt{1+sinx} = sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}$..(**1p**)

$cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(cos\frac{x}{2} - sin\frac{x}{2}\right)$..(**1p**)

$I = \int_{-1}^{1} \frac{x^4\sqrt{1+sinx}\cdot cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}{e^x cosx + \frac{sin2x}{2sinx}}\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{x^4\frac{\sqrt{2}}{2}cosx}{cosx\,(e^x+1)}\,dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_{-1}^{1}\frac{x^4}{e^x+1}\,dx$..(**2p**)

$I = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_{-1}^{1}\frac{x^4}{e^x+1}\,dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_{-1}^{1}\frac{t^4}{e^{-t}+1}\,dt = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_{-1}^{1}\frac{t^4e^t}{e^t+1}dt = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_{-1}^{1}\frac{t^4e^t+t^4-t^4}{e^t+1}\,dt$..........................(**2p**)

$I = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{2}{5} - I \Rightarrow 2I = \frac{\sqrt{2}}{5} \Rightarrow I = \frac{\sqrt{2}}{10}$.. (**1p**)

Problema IV. (7 puncte)

Dacă $r=0$, $I(0)=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x\,dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\cos 2x}{2}dx=\frac{x}{2}\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{4}\cdot\sin 2x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{24}+\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{8}$ ....**(1p)**

Dacă $r=-1$, $I(-1)=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}dx=x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{12}$ ....**(1p)**

Presupunem, în continuare că, $r\neq 0, r\neq -1$ și cum funcția de sub semnul integralei este pară în *sinx* și *cosx*, vom efectua substituția $tgx=t$ și obținem $I(r)=\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1}\frac{dt}{\left[1+(1+r)t^2\right](1+t^2)}$ ....**(1p)**

Avem două cazuri:

(1) Cazul $1+r>0$: În acest caz trinomul $1+(1+r)t^2$ având rădăcini complexe avem

$\frac{1}{\left[1+(1+r)t^2\right](1+t^2)}=\frac{At+B}{1+t^2}+\frac{Ct+D}{1+(1+r)t^2}$ și obținem: $A=C=0$ și $B=-\frac{1}{r}$, $D=\frac{r+1}{r}$ prin urmare

$$I(r)=-\frac{1}{r}\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1}\frac{dt}{1+t^2}+\frac{r+1}{r}\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1}\frac{dt}{1+(1+r)t^2}=\left(-\frac{1}{r}arctgt+\frac{\sqrt{r+1}}{r}arctg\sqrt{r+1}\,t\right)\Big|_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1}=$$

$=-\frac{\pi}{12r}+\frac{\sqrt{r+1}}{r}arctg\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)\cdot\sqrt{r+1}}{\sqrt{3}+r+1}$ ....**(2p)**

(2) Cazul $1+r<0$: Notăm $1+r=-\alpha^2, \alpha>0$ și prin urmare avem $\frac{1}{(1+t^2)(1-\alpha^2t^2)}=\frac{At+B}{1+t^2}+\frac{C}{1-\alpha t}+\frac{D}{1+\alpha t}$

și obținem: $A=0, B=\frac{1}{1+\alpha^2}, C=D=\frac{\alpha^2}{2(1+\alpha^2)}$ iar astfel rezultă că

$I(r)=\frac{1}{1+\alpha^2}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\alpha}{2(1+\alpha^2)}\cdot\ln\frac{1+\alpha t}{1-\alpha t}\Big|_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1}=\frac{\pi}{12(1+\alpha^2)}+\frac{\alpha}{2(1+\alpha^2)}\cdot\ln\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\cdot\frac{\sqrt{3}-\alpha}{\sqrt{3}+\alpha}\right)$ cu

$\alpha=\sqrt{-(1+r)}$ ....**(2p)**