OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ CLUJ - 9.02.2024
Barem clasa a V-a

Problema I. (7 puncte)

Ştiind că $2^{12n+18}+4^{6n+9}+8^{4n+6}+64^{2n+3}=2^{9(n+10)+6002}$, arătaţi că numărul S nu este pătrat perfect, unde $S=2022^n+2023^n+2024^n+2025^n$.

Soluție:

Se obţine: $2^{12n+18}+(2^2)^{6n+9}+(2^3)^{4n+6}+(2^6)^{2n+3}=2^{9n+90+6002}$ **2p**

$2^{12n+18}+2^{12n+18}+2^{12n+18}+2^{12n+18}=2^{9n+6092}$

$n=2024$ **2p**

$S=2022^{2024}+2023^{2024}+2024^{2024}+2025^{2024}$

$u(S)=u(2^{2024})+u(3^{2024})+u(4^{2024})+5=u(6+1+6+5)=8$ **2p**

$u(S)=8 \Rightarrow S\ nu\ este\ p.p.$ **1p**

Problema II. (7 puncte)

Se consideră șirul de numere naturale: $7, 11, 15, 19, \ldots\ldots\ldots$

a) Aflați termenul al 31 – lea și al 202 – lea din șir.

b) Arătați că suma primilor 20 de termeni este un pătrat perfect.

c) Stabiliți dacă numărul 8099 este termen al șirului și dacă da, determinați al câtelea termen din șir este acesta.

Soluție:

a) termen 1: $7=4\cdot1+3$

termen 2: $11=4\cdot2+3$ **1p**

termen 3: $15=4\cdot3+3$

$\ldots\ldots \Rightarrow$ termen 31: $=4\cdot31+3=127$ **1p**

termen 202: $=4\cdot202+3=811$ **1p**

b) termen 20: $=4\cdot20+3$

$S=4\cdot(1+2+3+\ldots+20)+3\cdot20$ **1p**

$S=4\cdot20\cdot21:2+3\cdot20$

$S=20\cdot2\cdot21+3\cdot20=20\cdot(42+3)=20\cdot45$ **1p**

$S=4\cdot5\cdot5\cdot9=2^2\cdot5^2\cdot3^2=(2\cdot5\cdot3)^2=30^2$ p.p. **1p**

c) $8099:4=2024$ rest $3 \Rightarrow 8099=4\cdot2024+3 \Rightarrow$ termenul al 2024 – lea.................................**1p**

Problema III. (7 puncte)

Un număr natural de trei cifre $\overline{abc}$ se împarte la răsturnatul său obţinându-se câtul 6 şi restul 3, iar diferenţa dintre cifra sutelor numărului şi cifra zecilor acestuia este 5. Arătaţi că ultima cifră a sumei $a^{2024} + b^{2024} + c^{2024}$ este cub perfect știind că a, b, c reprezintă cifrele numărului $\overline{abc}$.

Soluție:

$\overline{abc} = 6 \cdot \overline{cba} + 3, a = b + 5$..........**1p**
Folosim descompunerea zecimală obţinem: 94a = 50b + 599c +3..........**1p**
Înlocuind pe a obţinem 44b + 467 = 599c => 44b + 462 + 5 = 594c + 5c..........**1p**
$M_{11} + 5 = M_{11} + 5c$ **1p**
c = 1 => b = 3 => a = 8 =>numărul natural de trei cifre este 831..........**1p**
$U(8^{2024} + 3^{2024} + 1^{2024}) = U(6 + 1 + 1) = 8$..........**1p**
$8 = 2^3$ este cub perfect..........**1p**

Problema IV. (7 puncte)

Știind că numărul natural A dă restul 7 prin împărțire la 10, respectiv restul 9 prin împărțire la 11, aflați restul pe care îl dă A prin împărțire la 110.

Soluție:

$A = 10 \cdot C_1 + 7$ **1p**
$A = 11 \cdot C_2 + 9$ **1p**
Înmulțim prima relație cu 11 și a doua cu 10:
$11 \cdot A = 110 \cdot C_1 + 77$ **1p**
$10 \cdot A = 110 \cdot C_2 + 90$ **1p**
Scădem cele două relații:
$A = 110 \cdot C_1 + 187 - 110 - 110 \cdot C_2 - 90 = 110 \cdot (C_1 - C_2 - 1) + 97$ **3p**