OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ CLUJ - 9.02.2024
Barem clasa a VI-a

Problema I. (7 puncte)

Aflați numărul natural x din proporția : $\frac{x+1}{45}=\frac{n}{1}$, unde n este un număr natural care are exact 4 divizori proprii, având produsul divizorilor proprii 2025.

Soluție:

Descompunerea în produs de puteri de numere prime a lui 2025 este $3^4 \cdot 5^2$ **1p**

n este un numar natural cu 4 divizori proprii, deducem că n are în total 6 divizori. Un astfel de număr poate fi de forma a^5 sau $a^2 \cdot b$,cu a și b numere prime..**1p**

În prima situație ,dacă $n=a^5 \Rightarrow a \cdot a^2 \cdot a^3 \cdot a^4 = 3^4 \cdot 5^2 \Rightarrow a^{10} = 3^4 \cdot 5^2$,imposibil..**2p**

În cea de-a doua situație ,dacă_ $n=a^2 \cdot b \Rightarrow a \cdot a^2 \cdot b \cdot (ab) = 3^4 \cdot 5^2 \Rightarrow a^4 \cdot b^2 = 3^4 \cdot 5^2$ …………………………....**2p**

Deci $a=3, b=5 \Rightarrow n=45 \Rightarrow x+1=45^2 \Rightarrow x=2024$ **1p**

Problema II. (7 puncte)

Determinați numerele naturale a și b, știind că [a;b]- (a;b)=176 , iar raportul dintre [a;b] și (a;b) este 45, unde: [a;b] – cel mai mic multiplu comun; (a;b) – cel mai mare divizor comun.

Soluție:

$\frac{[a;b]}{(a;b)} = 45 \Rightarrow [a;b] = 45 \cdot (a;b) \Rightarrow (a;b) = 4, [a;b] = 180$ **2p**

$(a;b) = 4 \Rightarrow \left.\begin{matrix} 4|a \\ 4|b \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a = 4 \cdot x \\ b = 4 \cdot y \\ (x;y) = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ ....…………………………………………………..**2p**

$[a;b] \cdot (a;b) = a \cdot b \Rightarrow a \cdot b = 720 \Rightarrow x \cdot y = 45, (x;y) = 1$ ……………………………………………..**2p**

x	1	5	9	45	a	4	20	36	180
y	45	9	5	1	b	180	36	20	4

……………………………...………..**1p**

Problema III. (7 puncte)

Fie punctele conciclice A, B, C, D, E alese pe cerc în această ordine astfel încât $\widehat{AB}, \widehat{BC}$ au măsurile direct proporționale cu 8 și 11 iar $\widehat{BC}, \widehat{CD}$ invers proporționale cu numerele 3 și $\frac{11}{23}$. Dacă $\widehat{AB} \cdot \widehat{BC} \cdot \widehat{CD} = 6072^0$ iar E este un punct diametral opus lui A. Determinați măsurile arcelor $\widehat{AB}, \widehat{BC}, \widehat{CD}, \widehat{DE}$.

Soluție:

$\left(\widehat{AB}, \widehat{BC}\right) \overset{d.p}{\rightarrow} (8, 11) \Rightarrow \frac{\widehat{AB}}{8} = \frac{\widehat{BC}}{11} = k \Rightarrow \widehat{AB} = 8k, \widehat{BC} = 11k$ ……………………………………..……..**2p**

$\left(\widehat{BC}, \widehat{CD}\right) \overset{i.p}{\rightarrow} \left(3, \frac{11}{23}\right) \Rightarrow \widehat{BC} \cdot 3 = \widehat{CD} \cdot \frac{11}{23} \Rightarrow \widehat{CD} = 69k$ ……………………………………….………..**2p**

$\widehat{AB} \cdot \widehat{BC} \cdot \widehat{CD} = 6072^0 \Rightarrow k^3 = 1 \Rightarrow k = 1$ ……………………………………………………….……..**2p**

$\widehat{AB} = 8^0,\ \widehat{BC} = 11^0,\ \widehat{CD} = 69^0,\ \widehat{DE} = 92^0$ ……………………………………………………….……..**1p**

Problema IV. (7 puncte)

Unghiurile $\sphericalangle AOB, \sphericalangle BOC$ și $\sphericalangle COD$ au interioarele disjuncte două câte două și suma măsurilor lor egală cu $142°$. Se știe că măsurile unghiurilor sunt invers proporționale cu numerele a, b, respectiv c, unde a, b, c numere naturale care verifică relațiile

$$\frac{a}{2024 \cdot a + 3} = \frac{b}{2024 \cdot b + 5} = \frac{c}{2024 \cdot c + 7} \text{ și } ab + bc + ac = 71.$$

Să se demonstreze că unghiul format de bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle COD$, este obtuz.

Soluție:

Din $\frac{a}{2024 \cdot a + 3} = \frac{b}{2024 \cdot b + 5} = \frac{c}{2024 \cdot c + 7}$ obținem $2024 + \frac{3}{a} = 2024 + \frac{5}{b} = 2024 + \frac{7}{c}$ …………………………..…..**2p**

$\Longrightarrow a = 3k, b = 5k$ și $c = 7k$, unde $k \in \mathbb{N}$ ……………………………………………………………...**1p**

Relația $ab + bc + ac = 71$ devine $71 \cdot k^2 = 71 \quad \Longrightarrow \quad k = 1$, deci $a = 3, b = 5$ și $c = 7$ ………..……..**1p**

$\sphericalangle AOB, \sphericalangle BOC, \sphericalangle COD$ sunt invers proporționale cu 3, 5, respectiv 7 ………………………………….…..**1p**

$\sphericalangle AOB = 70^o, \sphericalangle BOC = 42^o, \sphericalangle COD = 30^o$ ………………………………………………………….…..**1p**

Finalizare, unghiul format de bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle COD = 92^o$, obtuz. ……………………….……**1p**