OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ CLUJ - 9.02.2024
Barem clasa a VII-a

Problema I. (7 puncte)

Se consideră numerele reale

$a = \sqrt{1\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{1\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{1\frac{1}{4}} \cdot \ ... \ \cdot \sqrt{1\frac{1}{2024}} \cdot \sqrt{2}$ și $b = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{12}} + \cdots + \frac{\sqrt{2025}-\sqrt{2024}}{\sqrt{2024 \cdot 2025}}$.

Calculați rădăcina pătrată a numărului $n = a \cdot b + 5$.

Soluție:

$a = \sqrt{\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot ... \cdot \frac{2025}{2024}} \cdot \sqrt{2}$ **1p**

$a = \sqrt{\frac{2025}{2}} \cdot \sqrt{2}$ **1p**

$a = 45$..**1p**

$b = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{4} \cdot \sqrt{3}} + \cdots + \frac{\sqrt{2025}-\sqrt{2024}}{\sqrt{2025} \cdot \sqrt{2024}}$ **1p**

$b = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2024}} - \frac{1}{\sqrt{2025}}$ **1p**

$b = \frac{44}{45}$ **1p**

$\sqrt{n} = \sqrt{a \cdot b + 5} = \sqrt{49} = 7$ **1p**

Problema II. (7 puncte)

a) Arătați că numărul $\sqrt{17 + 12\sqrt{2}} + \sqrt{17 - 12\sqrt{2}} \in \mathbb{N}$.

b) Calculați partea întreagă și partea fracționară a numărului

$$A = \left[\left(\sqrt{17 + 12\sqrt{2}} \right)^{2023} + \frac{1}{\left(\sqrt{17 - 12\sqrt{2}} \right)^{2023}} \right] \cdot \frac{\left(21 - 14\sqrt{2}\right)^{2024}}{4 \cdot 7^{2024}} - \frac{1}{2}.$$

Soluție:

a) $\sqrt{17 + 12\sqrt{2}} + \sqrt{17 - 12\sqrt{2}} = \sqrt{\left(3 + 2\sqrt{2}\right)^2} + \sqrt{\left(3 - 2\sqrt{2}\right)^2} == \left|3 + 2\sqrt{2}\right| + \left|3 - 2\sqrt{2}\right| = 3 + 2\sqrt{2} + 3 - 2\sqrt{2} = 6 \in \mathbb{N}$......**3p**

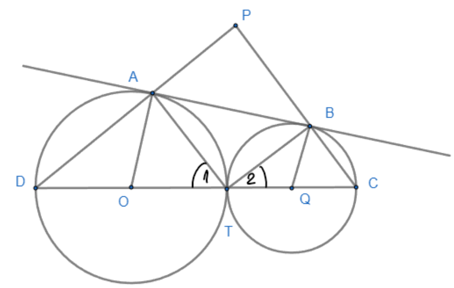
b) $A = \left[\left(3 + 2\sqrt{2}\right)^{2023} + \frac{1}{\left(3-2\sqrt{2}\right)^{2023}} \right] \cdot \frac{7^{2024}\left(3-2\sqrt{2}\right)^{2024}}{4 \cdot 7^{2024}} - \frac{1}{2} =$..**1p**

$\frac{(9-8)^{2023}+1}{\left(3-2\sqrt{2}\right)^{2023}} \cdot \frac{\left(3-2\sqrt{2}\right)^{2024}}{4 \cdot} - \frac{1}{2} = \frac{3-2\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} = 1 - \sqrt{2}$..**2p**

Deoarece $-1 \langle 1 - \sqrt{2} \langle 0 \Rightarrow [A] = -1, \{A\} = 1 - \sqrt{2} + 1 = 2 - \sqrt{2}$..**1p**

Problema III. (7 puncte)

Se consideră două cercuri $\mathrm{C}_1(O)$ și $\mathrm{C}_2(Q)$ de centre O și Q tangente exterioare în punctul T. Fie AB o tangentă comună celor două cercuri, $A \in \mathrm{C}_1(O)$, $B \in \mathrm{C}_2(Q)$, iar punctele D și C, puncte diametral opuse lui T, $D \in \mathrm{C}_1(O)$ și $C \in \mathrm{C}_2(Q)$. Să se demonstreze că $ATBP$ este dreptunghi, unde $\{P\} = DA \cap CB$.



Soluție: **desen corect** ……………………………………………………………………………**1p**

AB − tangentă, OA, QB − raze $OA \perp AB,\ QB \perp AB \ \Rightarrow AO \parallel BQ \ \Rightarrow \sphericalangle AOT$ și $\sphericalangle BQT$ suplementare **2p**

Notații: $\sphericalangle AOT = x^o$ și $\sphericalangle BQT = y^o \quad \Rightarrow \quad x^o + y^o = 180^o$

$\triangle\, AOT$ isoscel $\Rightarrow \ \sphericalangle T_1 = 90^o - \frac{x^o}{2}$ și $\triangle\, BQT$ isoscel $\Rightarrow \ \sphericalangle T_2 = 90^o - \frac{y^o}{2}$

$\sphericalangle ATB = 180^o - \sphericalangle T_1 - \sphericalangle T_2 = 90^o$ **2p**

$\sphericalangle DAT$ și $\sphericalangle CBT$ − unghiuri înscrise în semicercuri $TA \perp DP$ și $TB \perp PC$

Concluzia. **2p**

Problema IV. (7 puncte)

În triunghiul ABC, M este mijlocul laturii BC, iar BN și CP sunt perpendiculare pe AC, respectiv AB. Știind că triunghiul MNP este echilateral, AB=8 cm, AC=10 cm, calculați aria triunghiului BMN.

Soluție: **desen corect** ……………………………………………………………………………**1p**

PM și NM sunt mediane în triunghi dreptunghic

=> NM=PM=BM=MC=$\frac{BC}{2}$=>ΔMNC isoscel și ΔPMB isoscel ………………………………….…………**1p**

<MCN≡<MNC și <MPB≡<MBP ……………………………………………..………………………**1p**

<BMP+<PMN+<NMC=180^o=><PBM+<MCN=120^o=><A=60^o……………………………………………**1p**

AN=$\frac{AB}{2}$=4cm(teorema unghiului de 30^o)și BN=$4\sqrt{3}$ cm ……………………………………………………**1p**

A_{BNC}=$12\sqrt{3}\ cm^2$ ………………………………………………………………………..……………**1p**

NM mediană în ΔBNC=>A_{BMN}=$\frac{A_{BNC}}{2}$=$6\sqrt{3}cm^2$………………………………..……………………**1p**