OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ CLUJ - 9.02.2024
Barem clasa a VIII-a

Problema I. (7 puncte)

Se consideră numerele reale x și y astfel încât $y = x + 3$ și $x \in [-5, -1]$. Arătați că expresia $E(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 10x + 4y + 29} + \sqrt{x^2 + y^2 + 2x - 4y + 5}$ este constantă

Soluție:

$E(x,y) = \sqrt{(x^2 + 10x + 25) + (y^2 + 4y + 4)} + \sqrt{(x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4)}$..**1p**

$E(x,y) = \sqrt{(x+5)^2 + (y+2)^2} + \sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2}$..**1p**

Înlocuind $y = x + 3 \Rightarrow E(x,y) = \sqrt{(x+5)^2 + (x+5)^2} + \sqrt{(x+1)^2 + (x+1)^2}$..**1p**

$E(x,y) = \sqrt{2(x+5)^2} + \sqrt{2(x+1)^2} = \sqrt{2}|x+5| + \sqrt{2}|x+1|$..**1p**

$-5 \le x \le -1 \Rightarrow 0 \le x + 5 \le 4 \Rightarrow |x+5| = x + 5$..**1p**

$-5 \le x \le -1 \Rightarrow -4 \le x + 1 \le 0 \Rightarrow |x+1| = -x - 1$..**1p**

$E(x,y) = \sqrt{2}(x+5) + \sqrt{2}(-x-1) = 4\sqrt{2} = const$..**1p**

Problema II. (7 puncte)

Fie două numere reale, pozitive, nenule și distincte a și b.

a) Demonstrați că $a + \frac{1}{a} \ge 2$.
b) Dacă $ab = 3$, demonstrați că $a + b \ge 3$.

Soluție:

a) $\frac{(a-1)^2}{a} \ge 0, \forall a \in R_+^*$..**2p**

b) Din punctul a) $\Rightarrow$ $a + \frac{1}{a} \ge 2$ și $b + \frac{1}{b} \ge 2$

Prin adunarea lor obținem inegalitatea $a + b + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \ge 4$..**1p**

Aducem la numitor comun și avem $\frac{a^2b + ab^2 + a + b}{ab} \ge 4$. Numerele sunt nenule și pozitive,

deci putem înmulți inegalitatea cu ab și obținem $a^2b + ab^2 + a + b \ge 4ab$..**2p**

Prin gruparea termenilor, inegalitatea devine $(a+b)(1+ab) \ge 4ab$. Din ipoteză $ab = 3$, deci

$4(a+b) \ge 12$, de unde rezultă concluzia $a + b \ge 3$..**2p**

Problema III. (7 puncte)

Fie $x, y \in \boldsymbol{R}$ astfel încât $5x^2 + 2y^2 + 9 = 2(2xy + 2x + 3y)$.

Arătați că $2x + y \in [1, 13]$.

Soluție:

Relația dată se scrie $(2x - y)^2 + (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$..**3p**

Așadar, $(2x - y)^2 \leq 4, (x - 2)^2 \leq 4, (y - 3)^2 \leq 4$..**2p**

de unde $|x - 2| \leq 2,\ x \in [0,\ 4]$, $|y - 3| \leq 2,\ y \in [1,\ 5]$ și $2x + y \in [1, 13]$..**2p**

Problema IV. (7 puncte)

Trapezul dreptunghic $ABCD, AB \parallel CD, \sphericalangle A = 90^0, AC \perp BC, AD = DC = 6\ cm$ se îndoaie după diagonala AC astfel încât planele (ADC) și (ABC) să fie perpendiculare. Determinați sinusul unghiului făcut de dreapta DB cu planul (ABC).

Soluție: **desen corect** **1p**

$$AD = DC = 6\ cm \Rightarrow AC = 6\sqrt{2}\ cm, \sphericalangle DAC = 45^0 \Rightarrow \sphericalangle CAB = 45^0, \sphericalangle ACB = 90^0$$

$\Rightarrow \Delta ABC$ dreptunghic isoscel $\Rightarrow AC = BC = 6\sqrt{2} \Rightarrow AB = 12\ cm$..**2p**

Fie $DE \perp AC, (ADC) \perp (ABC), (ADC) \cap (ABC) = AC \Rightarrow DE \perp (ABC) \Rightarrow$

$pr_{(ABC)}(DB) = BE$..**2p**

$DE = 3\sqrt{2}, EB = 3\sqrt{10}, DB = 6\sqrt{3}$..**2p**

$sin(BD, (ABC)) = sin\,(\sphericalangle DBE) = \frac{DE}{DB} = \frac{\sqrt{6}}{6}$..**1p**