Barem clasa a IX-a
(OLM 2024-etapa locală)

Problema I. (7 puncte)

Folosind ipoteza, $x+y+z=2024$, obținem:

$\sqrt{2024x+yz}=\sqrt{(x+y+z)x+yz}=\sqrt{x^2+xy+xz+yz}=\sqrt{(x+y)(x+z)}\overset{m_g\le m_a}{\le}\dfrac{2x+y+z}{2}$ și analoagele.................**(4p)**

Deci: $\sqrt{2024x+yz}+\sqrt{2024y+xz}+\sqrt{2024z+xy}\le\dfrac{2x+y+z}{2}+\dfrac{2y+x+z}{2}+\dfrac{2z+x+y}{2}==2(x+y+z)=4048$ ....**(3p)**

Problema II. (7 puncte)

a) Obs. că $p_1+p_2+\cdots+p_{14}=2+3+5+\cdots+43=281<300\Rightarrow n\in\{1,2,\dots,14\}$........................... **(3p)**

b) Dem prin ind. mat. I) Et de verificare: $p_5=11>10$...**(1p)**

II) Et. de dem.: Presupunem că $p_k>2k,\ k\ge 5$. Dem. că $p_{k+1}>2(k+1), k\ge 5$. .... **(1p)**

$p_{k+1}\ge p_k+2>2k+2$, deci $p_{k+1}>2(k+1), k\ge 5\Rightarrow\ p_n>2n,\forall n\ge 5$.. **(2p)**

Problema III. (7 puncte)

a) Se arată că $MNPQ$ este paralelogram ....**(1p)**

Fie O un punct în plan. Folosind relația lui Leibniz, avem ....**(2p)**

$\overrightarrow{OG_1}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OM}\right), \overrightarrow{OG_2}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{ON}\right),\ \overrightarrow{OG_3}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OP}\right), \overrightarrow{OG_4}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OQ}\right)$

Condiția ca $G_1\ G_2\ G_3\ G_4$ să fie paralelogram este ca $\overrightarrow{OG_1}+\overrightarrow{OG_3}=\overrightarrow{OG_2}+\overrightarrow{OG_4}$...**(1p)**

Avem $\overrightarrow{OG_1}+\overrightarrow{OG_3}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OM}\right)$ și

$\overrightarrow{OG_2}+\overrightarrow{OG_4}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OQ}\right)$, iar $MNPQ$ paralelogram implică $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OQ}$,

de unde rezultă că $G_1\ G_2\ G_3\ G_4$ este paralelogram..**(1p)**

b) $\overrightarrow{AG_1}+\overrightarrow{CG_3}=\overrightarrow{OG_1}-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OG_3}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OG_2}+\overrightarrow{OG_4}-\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{BG_2}+\overrightarrow{DG_4}$...**(1p)**

S-a folosit și faptul că $ABCD$ paralelogram$\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OB}$..**(1p)**

Problema IV. (7 puncte)

$2025=45^2,\ (x+45)^2\ge 0,\ (x-45)^2\ge 0$ .... **(2p)**

$-1\le\frac{90x}{x^2+2025}\le 1$ .... **(2p)**

$\left[\frac{90x}{x^2+2025}\right]\in\{-1;\ 0;\ 1\}$ .... **(1p)**

$|2024x+1|\cdot(-1)=2025$ imposibil, $|2024x+1|\cdot 0=2025$ imposibil .... **(1p)**

$|2024x+1|\cdot 1=2025$. Finalizare: $x=1$ nu convine.. **(1p)**