OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 9 februarie 2024
Soluţii

Clasa a V-a

1. Ordonaţi crescător numerele:

$$\begin{aligned} a &= 2024^{2024}, \\ b &= 2023^{2024} + 2023^{2023}, \\ c &= 2024^{2023} + 2023^{2024}. \end{aligned}$$

Marinela Platon

Soluţie.
$c - b = 2024^{2023} - 2023^{2023} > 0$, deci $b < c$ **3p**
$a - c = 2024^{2023}(2024 - 1) - 2023^{2024} = 2023\,(2024^{2023} - 2023^{2023}) > 0$, deci $c < a$.
....**3p**
Rezultă ordonarea crescătoare $b < c < a$...**1p**

2. La un concurs de *darts* au participat 18 elevi. Fiecare concurent a aruncat câte 10 săgeţi la ţintă. Dacă o săgeată nimereşte ţinta, se acordă următoarele punctaje: 10 puncte pentru cercul central (zona 1), 6 puncte pentru primul inel (zona 2), respectiv 2 puncte pentru al doilea inel (zona 3). Elevii participanţi la concurs au ratat ţinta de 40 de ori şi au nimerit de 40 de ori primul inel (zona 2). Restul de aruncări au nimerit zona 1 sau zona 3. Ştiind că întreaga clasă a obţinut în total 920 de puncte, aflaţi câte săgeţi au fost trimise în cercul central (zona 1).

Adriana Caţaron

Soluţie.
Au fost aruncate în total $18 \cdot 10 = 180$ săgeţi....................................**1p**
$180 - 40 = 140$ săgeţi au nimerit ţinta **1p**
$140 - 40 = 100$ săgeţi au nimerit zona 1 sau zona 3 ....**1p**
Pentru cele 100 de săgeţi s-au obţinut $920 - 40 \cdot 6 = 680$ puncte. **1p**
Aplicăm *metoda falsei ipoteze.*
Dacă toate cele 100 de săgeţi ar fi numerit zona 3, atunci ar fi rezultat punctajul: $2 \cdot 100 = 200$ puncte. Cum diferenţa dintre punctajul zonei 1 şi cel al zonei 3 este $10 - 2 = 8$ puncte, deducem că numărul de săgeţi trimise în cercul central (zona 1) este $(680 - 200) : 8 = 60$. **3p**
Alternativ, problema se poate trata prin *metoda algebrică.*

3. Arătaţi că numărul

$$p = 2^{500} + 6^{250} + 6^{250} + 3^{500}$$

este pătrat perfect.

George Chetreanu

Soluţie.
$6^{250} = 2^{250} \cdot 3^{250}$ **1p**
$2^{500} = 2^{250} \cdot 2^{250}$ şi $3^{500} = 3^{250} \cdot 3^{250}$ **1p**
$p = 2^{250} \cdot 2^{250} + 2^{250} \cdot 3^{250} + 2^{250} \cdot 3^{250} + 3^{250} \cdot 3^{250}$ **1p**
$p = 2^{250}\left(2^{250} + 3^{250}\right) + 3^{250}\left(2^{250} + 3^{250}\right) = \left(2^{250} + 3^{250}\right)^2$ **3p**
Deci p este pătrat perfect **1p**

4. Ştiind că un număr natural A dă restul 9 prin împărţirea la 10 şi respectiv restul 7 prin împărţirea la 11, aflaţi restul împărţirii numărului A la 110.

Gazeta Matematică (enunţ modificat)

Soluţie.
$A = 10 \cdot c_1 + 9,\ c_1 \in \mathbb{N}$ **1p**
$A = 11 \cdot c_2 + 7,\ c_2 \in \mathbb{N}$ **1p**
Înmulţind prima relaţie cu 11 şi a doua cu 10, obţinem
$11A = 10 \cdot 11 \cdot c_1 + 99$
$10A = 10 \cdot 11 \cdot c_2 + 70$ **3p**
Prin scăderea celor două relaţii, rezultă $A = 110(c_1 - c_2) + 29$. **1p**
Cum $29 < 110$, deducem că restul împărţirii lui A la 110 este 29. ......**1p**

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 9 februarie 2024
Soluţii

Clasa a VI-a

1. Determinaţi cardinalul mulţimii

$$A = \{\overline{abcd} | \quad \overline{abcd} + \overline{badc} \quad \text{este pătrat perfect}\}$$

Gazeta Matematică

Soluţie.
Considerăm $a, b \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ şi $c, d \in \{0, 1, \ldots, 9\}$.
Avem $\overline{abcd} + \overline{badc} = 11 \cdot [100(a + b) + (c + d)]$ **2p**
Atunci $\overline{abcd} \in A \;\Leftrightarrow\; 100(a + b) + (c + d) = 11k^2,\; k \in \mathbb{N}^*$ **1p**
Din $2 \leq a + b \leq 18$ şi $0 \leq c + d \leq 18$ rezultă $200 \leq 100(a + b) + (c + d) \leq 1818$
Notăm $B = \{11k^2 | \; 200 \leq 11k^2 \leq 1818,\; k \in \mathbb{N}^*\}$
Obţinem $B = \{275, 396, 539, 704, 891, 1100, 1331, 1584\}$.
Cum $c + d \leq 18$, constatăm că $100(a + b) + (c + d) \in B$ doar în cazurile:
1. $100(a + b) + (c + d) = 704$ sau 2. $100(a + b) + (c + d) = 1100$ **2p**
Cazul 1. Ecuaţia $100(a + b) + (c + d) = 704$, echivalentă cu $\begin{cases} a + b = 7 \\ c + d = 4 \end{cases}$,

are $6 \cdot 5 = 30$ soluţii, de forma $\begin{cases} a = i \\ b = 7 - i \\ c = j \\ d = 4 - j \end{cases}$, $\; i \in \{1, 2, \ldots, 6\},\; j \in \{0, 1, \ldots, 4\}$.

Cazul 2. Ecuaţia $100(a + b) + (c + d) = 1100$, echivalentă cu $\begin{cases} a + b = 11 \\ c + d = 0 \end{cases}$,

are $8 \cdot 1 = 8$ soluţii, de forma $\begin{cases} a = i \\ b = 11 - i \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$, $\; i \in \{2, 3, \ldots, 9\}$.

În concluzie, mulţimea A are $30 + 8 = 38$ de elemente..........................**2p**

2. Suma unor numere naturale consecutive este 2024. Determinaţi numerele.

Ioana Maşca

Soluţie.
Fie $n > 1$ numere naturale consecutive $a,\; a + 1, \ldots,\; a + n - 1$, cu suma 2024....**1p**

Obţinem relaţia: $n(2a+n-1)=4048$. (1) **1p**
Avem $4048 = 2^4 \cdot 11 \cdot 23$ **1p**
Numerele naturale n şi $2a+n-1$ au parităţi diferite deoarece suma lor este un număr impar. Din $(n-1)^2 < n(n-1) \le n(2a+n-1) = 4048$ rezultă $n \le 64$...**1p**
Atunci relaţia (1) este satisfăcută în următoarele trei cazuri:

(a) $\begin{cases} n = 16 \\ 2a+n-1 = 253 \end{cases}$. Rezultă $a = 119$ şi numerele 119, 120, ..., 134 ......**1p**

(b) $\begin{cases} n = 11 \\ 2a+n-1 = 368 \end{cases}$. Rezultă $a = 179$ şi numerele $179, 180, \ldots, 189$ **1p**

(c) $\begin{cases} n = 23 \\ 2a+n-1 = 176 \end{cases}$. Rezultă $a = 77$ şi numerele $77, 78, \ldots, 99$ **1p**

3. Se consideră patru unghiuri în jurul unui punct: $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$, $\widehat{COD}$ şi $\widehat{DOA}$. Măsurile unghiurilor $\widehat{AOB}$ şi $\widehat{BOC}$ sunt direct proporţionale cu numerele 5 şi 3, măsurile unghiurilor $\widehat{BOC}$ şi $\widehat{COD}$ sunt invers proporţionale cu numerele 0,1(6) şi 0,125, iar unghiurile $\widehat{AOB}$ şi $\widehat{COD}$ sunt suplementare.

   (a) Determinaţi măsurile unghiurilor $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$ şi $\widehat{COD}$.

   (b) Fie E simetricul punctului C faţă de punctul O. Demonstaţi că unghiul format de bisectoarele unghiurilor $\widehat{AOB}$ şi $\widehat{DOE}$ este congruent cu unghiul $\widehat{AOD}$.

Rodica Cocalea

Soluţie.

(a) Conform ipotezei, $\dfrac{\widehat{AOB}}{5} = \dfrac{\widehat{BOC}}{3}$. Atunci $\widehat{AOB} = 5k$ şi $\widehat{BOC} = 3k$, unde $k > 0$ este valoarea comună a celor două rapoarte **1p**
Din ipoteză, $\widehat{BOC} \cdot 0,1(6) = \widehat{COD} \cdot 0,125$. **1p**
Avem $0,1(6) = \dfrac{16-1}{90} = \dfrac{1}{6}$ şi $0,125 = \dfrac{125}{1000} = \dfrac{1}{8}$.
Obţinem $\widehat{COD} = \dfrac{8}{6} \cdot \widehat{BOC} = \dfrac{4}{3} \cdot 3k = 4k$. **1p**
Din condiţia $\widehat{AOB} + \widehat{COD} = 180°$ rezultă $9k = 180°$, de unde $k = 20°$......**1p**
Obţinem $\widehat{AOB} = 100°$, $\widehat{BOC} = 60°$ şi $\widehat{COD} = 80°$. **1p**

(b) $\widehat{AOE} = 180° - (\widehat{AOB} + \widehat{BOC}) = 20°$ şi $\widehat{DOE} = 180° - \widehat{COD} = 100°$ **1p**
Dacă $[OM$ este bisectoarea unghiului $\widehat{AOB}$, atunci $\widehat{AOM} = 50°$.
Dacă $[ON$ este bisectoarea unghiului $\widehat{DOE}$, atunci $\widehat{EON} = 50°$.
Avem $\widehat{MON} = \widehat{AOM} + \widehat{AOE} + \widehat{EON} = 120°$ şi $\widehat{DOA} = \widehat{DOE} + \widehat{AOE} = 120°$, deci $\widehat{MON} \equiv \widehat{DOA}$..**1p**

4. Punctele A_1, A_2, A_3, ..., A_n sunt situate, în această ordine, pe un cerc de centru O, astfel încât $\widehat{A_1OA_2} = x^\circ$, $\widehat{A_2OA_3} = (2x)^\circ$, $\widehat{A_3OA_4} = (3x)^\circ$, ..., $\widehat{A_nOA_1} = (nx)^\circ$, unde $x \in \mathbb{N}^*$, iar $n \in \mathbb{N}$, $n > 10$.

(a) Determinaţi numerele naturale n şi x.

(b) Arătaţi că OA_1 este bisectoarea unghiului $\widehat{A_6OA_{15}}$.

(c) Demonstraţi că punctele A_4, O, A_{12} sunt coliniare.

Dorina Rapcea

Soluţie.

(a) Avem $\widehat{A_1OA_2} + \widehat{A_2OA_3} + \widehat{A_3OA_4} + \ldots + \widehat{A_nOA_1} = 360^\circ$. Conform ipotezei, rezultă $x + 2x + 3x + \ldots + nx = 360$ **1p**
Obţinem $n(n+1)x = 720$, deci $n(n+1)$ divide 720. Din inegalitatea $n^2 < n(n+1)x = 720 < 27^2$ deducem $n \leq 26$. Astfel, $n \in \{11, 12, \ldots, 26\}$.
După verificări directe, constatăm că $n(n+1)$ divide 720 doar dacă $n = 15$.
Pentru $n = 15$, obţinem $x = 3$ **2p**

(b) Avem $\widehat{A_1OA_6} = \widehat{A_1OA_2} + \widehat{A_2OA_3} + \widehat{A_3OA_4} + \widehat{A_4OA_5} + \widehat{A_5OA_6} = 3^\circ + 6^\circ + 9^\circ + 12^\circ + 15^\circ = 45^\circ$ şi $\widehat{A_{15}OA_1} = (15 \cdot 3)^\circ = 45^\circ$, deci $\widehat{A_1OA_6} \equiv \widehat{A_1OA_{15}}$.
Rezultă că OA_1 este bisectoarea unghiului $\widehat{A_6OA_{15}}$.......................... **2p**

(c) $\widehat{A_4OA_{12}} = 12^\circ + 15^\circ + 18^\circ + 21^\circ + 24^\circ + 27^\circ + 30^\circ + 33^\circ = 180^\circ$. Rezultă că punctele A_4, O, A_{12} sunt coliniare **2p**

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 9 februarie 2024
Soluţii

Clasa a VII-a

1. Demonstraţi că $\dfrac{\sqrt{2}}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}+...+\dfrac{\sqrt{2022}}{2023}<1001$.

Gazeta Matematică

Soluţie. Notăm $S=\dfrac{\sqrt{2}}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}+...+\dfrac{\sqrt{2022}}{2023}$.

Metoda 1.

$\dfrac{\sqrt{n}}{n+1}<\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, pentru oricare $n\in\mathbb{N}^*$ ....**1 punct**

Atunci $S<\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+...+\dfrac{1}{\sqrt{2022}}$. ....**1 punct**

$\dfrac{1}{\sqrt{n}}<1$, pentru $n\geq 2$, de unde obţinem $\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{100}}<99$.

$\dfrac{1}{\sqrt{n}}<\dfrac{1}{10}$, pentru $n\geq 101$. Atunci $\dfrac{1}{\sqrt{101}}+\dfrac{1}{\sqrt{102}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{2022}}<1922\cdot\dfrac{1}{10}$.

....**4 puncte**

Prin tranzitivitate, rezultă $S<99+\dfrac{1922}{10}<1001$. ....**1 punct**

Metoda 2.

$\sqrt{n}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})=\sqrt{n(n+1)}+n<2(n+1)$, de unde obţinem

$\dfrac{\sqrt{n}}{n+1}<\dfrac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$, pentru oricare $n\in\mathbb{N}^*$ ....**4 puncte**

Atunci $S<2(\sqrt{3}-\sqrt{2})+2(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\ldots+2(\sqrt{2023}-\sqrt{2022})=2(\sqrt{2023}-\sqrt{2})$.

....**2 puncte**

$2(\sqrt{2023}-\sqrt{2})<2(\sqrt{2025}-1)=88$. Rezultă $S<88<1001$ ....**1 punct**

Observaţie. $S\approx 86,168513$.

2. Determinaţi numerele întregi a, b, c ştiind că: $\begin{cases} a^2+a\leq 2b+1\\ b^2+b\leq 2c+1\\ c^2+c\leq 2a+1\end{cases}$.

Romeo Ilie

Soluţie. Fie $a,b,c\in\mathbb{Z}$ o soluţie a sistemului de inecuaţii din enunţ.

x^2+x este un număr par pentru oricare $x\in\mathbb{Z}$ ....**1 punct**

Rezultă: $a^2+a\leq 2b$, $b^2+b\leq 2c$ şi $c^2+c\leq 2a$. ....**1 punct**

Adunând aceste inegalităţi, obţinem $a(a-1)+b(b-1)+c(c-1)\leq 0$ ....**1 punct**

$x(x-1)\geq 0$, pentru oricare $x\in Z$, cu egalitate numai pentru $x\in\{0,1\}$...**1 punct**

Deducem $a,b,c\in\{0,1\}$ ....**1 punct**

$a=1$ sau $b=1$ sau $c=1$ implică $a=b=c=1$ ....**1 punct**

Soluţiile problemei: $a_1=b_1=c_1=1$ şi $a_2=b_2=c_2=0$. ....**1 punct**

3. Fie triunghiul dreptunghic ABC, neisoscel, cu $\widehat{A} = 90°$. Pe catetele AB şi AC se construiesc, în exteriorul triunghiului, pătratele $ABDE$ şi $ACFG$. Demonstraţi că:

   (a) punctele D, A, F sunt coliniare;

   (b) patrulaterul $EBCG$ este trapez isoscel;

   (c) perpendiculara din A pe BC trece prin mijlocul segmentului EG.

Marinela Canu

Soluţie.

(a) $\widehat{BAD} = 45° = \widehat{FAG}$. Rezultă că punctele D, A, F sunt coliniare. . ...**1 punct**

(b) $\widehat{BEC} = 45° = \widehat{GCE}$, deci $EB \parallel GC$ (alterne interne congruente). . ...**1 punct**
$\triangle AEG \equiv \triangle ABC$ (C.C.). Rezultă $EG \equiv BC$ şi $\widehat{AEG} = \widehat{ABC}$.
Cum $\triangle ABC$ este neisoscel, avem $\widehat{ABC} \neq \widehat{ACB}$. Atunci $\widehat{AEG} \neq \widehat{ACB}$, de unde $EG \nparallel BC$. Prin urmare, $EBCG$ este trapez isoscel . . . .**2 puncte**

(c) Fie $AP \perp BC$, $P \in BC$. Notăm $\{M\} = AP \cap EG$.
$\widehat{MAE} = \widehat{PAC} = \widehat{ABC} = \widehat{AEG}$ de unde $ME \equiv MA$. Analog, $MG \equiv MA$.
Rezultă că M este mijocul lui EG. . . . .**3 puncte**

4. Fie pătratul $ABCD$. Pe dreapta BD se consideră punctul N, astfel încât $BN = AB$, cu B situat între D şi N. Pe dreapta CD se consideră punctul M, astfel încât $\widehat{MAD} = 3\widehat{AMD}$, cu C situat între D şi M. Dreptele AM şi DN se intersectează în punctul P, iar dreptele NC şi AD se intersectează în punctul H. Perpendiculara în H pe dreapta AH intersectează dreapta MN în punctul G. Arătaţi că:

   (a) patrulaterul $ANMD$ este inscriptibil;

   (b) dreptele CP şi MN sunt paralele;

   (c) punctele A, C şi G sunt coliniare.

Marinela Canu

Soluţie.

(a) ΔABN isoscel, cu $\widehat{ABN} = 135°$. Atunci $\widehat{ANB} = \widehat{NAB} = 22°30'$ . ...**2 puncte**
$\widehat{AMD} = 90°/4 = 22°30' = \widehat{ANB}$. Rezultă $ANMD$ - inscriptibil. . ...**2 puncte**

(b) $\triangle PAD \equiv \triangle PCD$ (L.U.L.). Rezultă $\widehat{DCP} = \widehat{DAP} = 90° - 22°30' = 67°30'$.
$\widehat{AMN} = \widehat{ADN}$ ($ANMD$ - inscriptibil). $ABCD$ - pătrat, deci $\widehat{ADN} = 45°$.
$\widehat{DMN} = \widehat{AMN} + \widehat{AMD} = 45° + 22°30' = 67°30'$. Atunci $\widehat{DCP} \equiv \widehat{DMN}$.
Rezultă $CP \parallel MN$ (unghiuri corespondente congruente) . . . .**2 puncte**

(c) Patrulaterul $ANMD$ este inscriptibil, deci $\widehat{ANG} = 180° - \widehat{ADM} = 90°$.
Rezultă că patrulaterul $ANGH$ este inscriptibil, de unde $\widehat{HAG} = \widehat{HNG}$.
$\widehat{HNG} = \widehat{ANG} - \widehat{ANC} = 90° - 2 \cdot 22°30' = 45°$, deci $\widehat{HAG} = 45°$.
$\widehat{HAC} = 45° = \widehat{HAG}$. Rezultă că punctele A, C şi G sunt coliniare ...**1 punct**

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 9 februarie 2024
Soluţii

Clasa a VIII-a

1. Determinaţi cifrele a, b, x pentru care $\overline{ab}^2 = \overline{xxb}$ şi $\overline{ba}^2 = \overline{bxx}$.

Gazeta Matematică

Soluţie.
Cifrele a şi b sunt nenule.
Cazul 1. $b = 1$.
Obţinem sistemul $\begin{cases} (10a+1)^2 = 110x+1 \\ (10+a)^2 = 100+11x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10a^2+2a = 11x \\ a^2+20a = 11x \end{cases}$ ....**2 puncte**
Atunci a verifică ecuaţia $10a^2 + 2a = a^2 + 20a$, echivalentă cu ecuaţia $a(a-2) = 0$.
Cum $a \neq 0$, obţinem $a = 2$. Rezultă $x = 4$ ....**2 puncte**
Cazul 2. $b \geq 2$.
Atunci $b^2 \geq 2b > b+1$. Rezultă: $\overline{ba}^2 > 100b^2 > 100(b+1) > \overline{bxx}$.........**2 puncte**
În concluzie, $a = 2$, $b = 1$ şi $x = 4$ reprezintă soluţia unică ....**1 puncte**

2. Aflaţi numerele reale x, y, z care satisfac simultan relaţiile:

   (a) $x^2 + 5y^2 + z^2 = 4xy + 2yz$.

   (b) $5x + \sqrt{7}\left(\frac{2}{\sqrt{7}+1}\right)^2 y + \left(\frac{\sqrt{7}-1}{\sqrt{7}+1}\right)^2 z = 2024.$

Ioana Maşca

Soluţie.
Din (a) rezultă $(x-2y)^2 + (y-z)^2 = 0$. Atunci $x = 2y$ şi $y = z$ ....**3 puncte**
Înlocuim $x = 2y$ şi $z = y$ în (b). După calcule, obţinem $11y = 2024$ ......**2 puncte**
Sistemul are soluţia unică $x = 368$, $y = z = 184$ ....**2 puncte**

3. Determinaţi numerele întregi x şi y care satisfac simultan relaţiile:

   (a) $x^2 + 2024 < 90y$,

   (b) $y^2 + 2024 < 90x$.

Aurel Bârsan

Soluţie.
Metoda 1. Dacă $a, b \in Z$ şi $a < b$, atunci $a + 1 \leq b$.
Prin urmare, $x^2 + 2025 \leq 90y$ şi $y^2 + 2025 \leq 90x$ ....**3 puncte**
Adunând inegalităţile anterioare şi grupând convenabil termenii, obţinem relaţia $(x-45)^2 + (y-45)^2 \leq 0$. Rezultă $x = y = 45$. ....**3 puncte**
Reciproc, $x = y = 45$ verifică cele două condiţii din enunţ ....**1 punct**

Metoda 2. Adunând cele două inegalităţi din enunţ şi grupând convenabil termenii, obţinem $(x-44)(x-46) + (y-44)(y-46) < 0$ ....**3 puncte**
Cel puţin unul dintre termenii de mai sus este negativ.
Presupunem că $(x-44)(x-46) < 0$. Cum $x \in Z$, rezultă $x = 45$. ....**3 puncte**
Înlocuind $x = 45$ în enunţ, obţinem inegalităţile $4049 < 90y$ şi $y^2 < 2026$.
Rezultă $y = 45$. Cazul $(y-44)(y-46) < 0$ se tratează analog. ....**1 punct**

4. $ABCDA'B'C'D'$ este un cub cu muchia de 12 cm, în care $AC \cap BD = \{O\}$, M este mijlocul lui BC, $AM \cap BD = \{N\}$, P este mijlocul lui CC' şi Q este mijlocul lui DD'.

   (a) Arătaţi că $PN \| (AQC')$.

   (b) Aflaţi distanţa de la punctul O la planul (AQC').

Dorina Rapcea

Soluţie.

(a) Din relaţiile $BP \| AQ$, $DP \| QC'$, $BP, DP \subset (BDP)$, $AQ, QC' \subset (AQC')$, rezultă $(BDP) \| (AQC')$. $PN \subset (BDP)$, deci $PN \| (AQC')$. ....**3 puncte**

(b) Fie E mijlocul lui BB'. $AEC'Q$ este romb, deci $E \in (AQC')$ şi $AC' \perp QE$. Fie $AC' \cap EQ = \{G\}$. Construim $OF \perp AC'$, cu $F \in AC'$.
Avem $OG \perp QE$, $AG \perp QE$, $OF \perp AG$, cu $QE, AG \subset (AQC')$. Rezultă $OF \perp (AQC')$ (reciproca teoremei celor trei perpediculare) ....**2 puncte**
În $\triangle OAG$, cu $\widehat{O} = 90°$ şi $OF \perp AG$, avem $OF = \dfrac{OA \cdot OG}{AG} = \dfrac{6\sqrt{2} \cdot 6}{6\sqrt{3}} = 2\sqrt{6}$.
În concluzie, $d(O, (AQC')) = 2\sqrt{6}$ cm..............................**2 puncte**