OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 9 februarie 2024
Soluţii

Clasa a IX-a

1. Fie numerele reale strict pozitive $a_1, a_2, ..., a_n$, astfel încât $\dfrac{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_k^2}{a_1 + a_2 + ... + a_k} = \dfrac{2k+1}{3}$, pentru oricare $k \in \{1, 2, ..., n\}$. Demonstraţi că $a_1^3 + a_2^3 + ... + a_n^3 = (a_1 + a_2 + ... + a_n)^2$.

Romeo Ilie

Soluţie.
Demonstrăm prin metoda inducţiei că $a_i = i$, pentru $i = 1, \dots, n$........ **2 puncte**
Pentru $k = 1$, avem $\dfrac{a_1^2}{a_1} = 1$, de unde $a_1 = 1$ .... **1 punct**
Dacă $n > 1$, fie $k \in \{1, \dots, n-1\}$. Presupunem că $a_i = i$, pentru $i \in \{1, \dots, k\}$ şi demonstrăm că $a_{k+1} = k + 1$ .... **1 punct**
Din relaţia $a_1^2 + a_2^2 + ... + a_k^2 + a_{k+1}^2 = \dfrac{2k+3}{3}(a_1 + a_2 + ... + a_k + a_{k+1})$ obţinem $\dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6} + a_{k+1}^2 = \dfrac{2k+3}{3}\left(\dfrac{k(k+1)}{2} + a_{k+1}\right)$ .... **1 punct**
Rezultă $a_{k+1}^2 - \dfrac{2k+3}{3}a_{k+1} - \dfrac{k(k+1)}{3} = 0$, de unde $a_{k+1} = k+1$ sau $a_{k+1} = -k/3$.
Cum $a_{k+1} > 0$, deducem $a_{k+1} = k + 1$ .... **1 punct**
Am demonstrat prin inducţie că $a_i = i$, pentru $i \in \{1, \dots, n\}$.
Atunci $a_1^3 + a_2^3 + ... + a_n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4} = (a_1 + a_2 + ... + a_n)^2$ .... **1 punct**

2. Arătaţi că:
   (a) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} \geq \dfrac{4}{x+y}$, pentru oricare $x, y > 0$;
   (b) $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} \geq \dfrac{2(a+b)}{a+b+2c}$, pentru oricare $a, b, c > 0$.

Ovidiu Pop

Soluţie.

(a) Inegalitatea este echivalentă cu $\dfrac{x+y}{2} \geq \dfrac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$, pentru oricare $x, y > 0$, cunoscută ca inegalitatea dintre media aritmetică şi media armonică..... **3 puncte**
Observaţie. Se acordă **3 puncte** pentru demonstrarea directă a inegalităţii, fără referire la inegalitatea mediilor.

(b) **Metoda 1.**
Notăm $x = a + c$, $y = b + c$ şi $z = a + b + c$. Avem $x, y, z > 0$ . . ... **2 puncte**
Inegalitatea (b) devine $\dfrac{z-y}{y} + \dfrac{z-x}{x} \geq \dfrac{4z - 2(x+y)}{x+y}$,
ecivalentă cu $z\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} - \dfrac{4}{x+y}\right) \geq 0$, satisfăcută conform inegalităţii (a).
. . . . **2 puncte**

Metoda 2.
Inegalitatea (b) este echivalentă cu

$$\left(\frac{a}{b+c} - \frac{a+b}{a+b+2c}\right) + \left(\frac{b}{c+a} - \frac{a+b}{a+b+2c}\right) \geq 0$$

. . . . **1 punct**
Efectuând calculele, obţinem inegalităţile echivalente

$$\frac{(a-b)(a+b+c)}{(b+c)(a+b+2c)} + \frac{(b-a)(a+b+c)}{(a+c)(a+b+2c)} \geq 0$$

şi

$$\frac{(a-b)^2(a+b+c)}{(b+c)(c+a)(a+b+2c)} \geq 0$$

. Astfel, inegalitatea (b) este demonstrată . . . . **3 puncte**

3. Fie $ABCD$ un paralelogram şi punctele $M \in (AB)$, $N \in (BC)$, $P \in (CD)$ astfel încât $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BN} = \frac{5}{6}\overrightarrow{BC}$ şi $\overrightarrow{DP} = \frac{1}{6}\overrightarrow{DC}$. Arătaţi că centrul de greutate al triunghiului MNP se află pe dreapta AC.

Gazeta Matematică

Soluţie. Fie $AC \cap BD = \{O\}$. Avem

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}, \\ \overrightarrow{ON} &= \frac{1}{6}\overrightarrow{OB} + \frac{5}{6}\overrightarrow{OC}, \\ \overrightarrow{OP} &= \frac{5}{6}\overrightarrow{OD} + \frac{1}{6}\overrightarrow{OC}. \end{aligned}$$

. . . . **3 puncte**
Notăm cu G este centrul de greutate al triunghiului MNP. Atunci

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}\right)$$

. . . . **2 puncte**
Obţinem $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\Big(\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{OB} + \frac{5}{6}\overrightarrow{OC} + \frac{5}{6}\overrightarrow{OD} + \frac{1}{6}\overrightarrow{OC}\Big) = \frac{1}{3}\Big(- \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} +$
$+ \frac{2}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{OB} + \frac{5}{6}\overrightarrow{OC} - \frac{5}{6}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{OC}\Big) = \frac{2}{9}\overrightarrow{OC}$, deci $G \in OC$ . . . . **2 puncte**

4. (a) Demonstraţi identitatea: $[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x]$, pentru oricare $x\in\mathbb{R}$.
(b) Rezolvaţi ecuaţia: $\left[x+\frac{1}{2}\right]+\left[2x+\frac{1}{2}\right]+\left[4x+\frac{1}{2}\right]+\left[8x+\frac{1}{2}\right]+...+\left[2^{100}x+\frac{1}{2}\right]=0$.

($[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a)

Florin Cârstea

Soluţie.

(a) Fie $x\in\mathbb{R}$. Notăm $[x]=k\in\mathbb{Z}$. Avem $x\in[k,k+1)$.
Cazul 1. $x\in\left[k,k+\frac{1}{2}\right)$. Atunci $x+\frac{1}{2}\in\left[k+\frac{1}{2},k+1\right)$ şi $2x\in[2k,2k+1)$.
Rezultă $[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=k+k=2k=[2x]$.
Cazul 2. $x\in\left[k+\frac{1}{2},k+1\right)$. Deci $x+\frac{1}{2}\in\left[k+1,k+\frac{3}{2}\right)$ şi $2x\in[2k+1,2k+2)$.
Rezultă $[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=k+(k+1)=2k+1=[2x]$. .... **2 puncte**

(b) Aplicând identitatea (a), deducem că ecuaţia este echivalentă cu:
$([2x]-[x])+([4x]-[2x])+)+...+([2^{101}x]-[2^{100}x])=0$.
După reducerea termenilor, ecuaţia devine $[2^{101}x]=[x]$ .... **2 puncte**
Atunci $|2^{101}x-x|<1$, de unde deducem $x\in(-1,1)$ .... **1 punct**

i. $x\in(-1,0)$.
Avem: $[2^{101}x]=[x]\Leftrightarrow[2^{101}x]=-1\Leftrightarrow-1\leq 2^{101}x<0\Leftrightarrow-\frac{1}{2^{101}}\leq x<0$.
Obţinem mulţimea de soluţii: $\mathcal{S}_1=\left[-\frac{1}{2^{101}},0\right)$.

ii. $x\in[0,1)$.
Avem: $[2^{101}x]=[x]\Leftrightarrow[2^{101}x]=0\Leftrightarrow 0\leq 2^{101}x<1\Leftrightarrow 0\leq x<\frac{1}{2^{101}}$.
Obţinem mulţimea de soluţii: $\mathcal{S}_2=\left[0,\frac{1}{2^{101}}\right)$.

Mulţimea soluţiilor ecuaţiei date: $\mathcal{S}=\mathcal{S}_1\cup\mathcal{S}_2=\left[-\frac{1}{2^{101}},\frac{1}{2^{101}}\right)$ .....**2 puncte**

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 9 februarie 2024
Soluţii

Clasa a X-a

1. Fie numărul real $a = \sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[8]{3} \cdot ... \cdot \sqrt[2^{2024}]{3}$.

   (a) Demonstraţi că $[a] = 2$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului a.

   (b) Aflaţi cel mai mic număr $n \in \mathbb{N}^*$, pentru care $a^1 \cdot a^2 \cdot a^3 \cdot ... \cdot a^n \in \mathbb{Q}$.

⋆⋆⋆

Soluţie.

(a) Demonstrăm $2 \leq a < 3$. Astfel, avem:
$a = 3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...+\frac{1}{2^{2024}}} > 3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} = 3^{\frac{3}{4}} = 27^{\frac{1}{4}} > 16^{\frac{1}{4}} = 2$ .... **2 puncte**
$a = 3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...+\frac{1}{2^{2024}}} = 3^{1-\frac{1}{2^{2024}}} < 3$ .... **2 puncte**

(b) $x_n := a^1 \cdot a^2 \cdot a^3 \cdot ... \cdot a^n = a^{\frac{n(n+1)}{2}} = 3^{\frac{(2^{2024}-1)n(n+1)}{2^{2025}}}$ ....**1 punct**
$x_n \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \dfrac{(2^{2024}-1)n(n+1)}{2^{2025}} \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow 2^{2025}$ divide $n(n+1)$ ...... **1 punct**
Cum n şi $n+1$ sunt numere prime între ele, rezultă că $2^{2025}|n$ sau $2^{2025}|(n+1)$.
Valoarea minimă a lui n pentru care $x_n \in \mathbb{Q}$ este $2^{2025} - 1$ ....**1 punct**

2. Considerăm numerele complexe z_1, z_2, z_3, de modul egal cu 1, cu proprietatea că

$$z_1 + z_2 + z_3 = z_1 z_2 z_3 = 1.$$

   (a) Arătaţi că $(1 - z_1)(1 - z_2)(1 - z_3) = 0$.

   (b) Determinaţi tripletele (z_1, z_2, z_3) cu proprietatea din enunţ.

⋆⋆⋆

Soluţie.

(a) Din ipoteză, rezultă $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ .... **1 punct**
şi $(1 - z_1)(1 - z_2)(1 - z_3) = 0 \iff z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 = 1$. .... **1 punct**
Dar $z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 = \dfrac{z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1}{z_1 z_2 z_3} = \dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{z_2} + \dfrac{1}{z_3} = \overline{z_1 + z_2 + z_3} = 1$.
Identitatea (a) este demonstrată. .... **2 puncte**

(b) Din (a) rezultă că cel puţin un număr este egal cu 1. .... **1 punct**
Obţinem $\{z_1, z_2, z_3\} = \{1, i, -i\}$. .... **2 puncte**

3. Fie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definită prin $f(n) = \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n+1}{5}\right]$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

(a) Arătaţi că f nu este surjectivă.

(b) Determinaţi $m \in N$ pentru care ecuaţia $f(x) = m$ are soluţie unică.

($[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x)

Gazeta Matematică

Soluţie.

(a) f este crescătoare .... **1 punct**
$f(3) = 1$ şi $f(4) = 3$ .... **1 punct**
Cum f este crescătoare, $2 \notin \mathrm{Im}(f)$, deci f nu este surjectivă......... **1 punct**

(b) Orice $n \in \mathbb{N}$ poate fi scris în forma $n = 10k + r$, unde $n, k \in \mathbb{N}$, cu $0 \leq r \leq 9$.
$f(10k+r) = \left[5k + \frac{r}{2}\right] + \left[2k + \frac{r+1}{5}\right] = 7k + \left[\frac{r}{2}\right] + \left[\frac{r+1}{5}\right]$...... **2 puncte**
Calculând $\left[\frac{r}{2}\right] + \left[\frac{r+1}{5}\right]$ pentru fiecare $r \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, se obţin, în ordine, rezultatele $\{0, 0, 1, 1, 3, 3, 4, 4, 5, 6\}$ .... **1 punct**
Deducem că ecuaţia $f(x) = m$ are soluţie unică dacă şi numai dacă:
$m \in \{7k + 5 |\ k \in \mathbb{N}\} \cup \{7k + 6 |\ k \in \mathbb{N}\}$ .... **1 punct**

4. Fie $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ o funcţie surjectivă cu proprietatea

$$f(x + y) \geq f(x) + y, \text{ pentru oricare } x, y \geq 0.$$

Demonstraţi că:

(a) f este inversabilă;

(b) $f^{-1}(x + y) \leq f^{-1}(x) + y$, pentru oricare $x, y \geq 0$, unde $f^{-1} : [0, \infty) \to [0, \infty)$ este inversa funcţiei f.

Romeo Ilie

Soluţie.

(a) Pentru orice $y > 0$, folosind ipoteza, avem

$$f(x + y) \geq f(x) + y > f(x), \ \forall\, x \geq 0.$$

Deducem că f este strict crescătoare, deci injectivă .... **2 puncte**
În concluzie f este bijectivă, deci inversabilă .... **1 punct**

(b) f strict crescătoare implică f^{-1} strict crescătoare. .... **1 punct**
Fie $x, y \geq 0$. Folosind ipoteza, avem:

$$f(f^{-1}(x) + y) \geq f(f^{-1}(x)) + y = x + y.$$

.... **2 puncte**
Cum $f(f^{-1}(x) + y) \geq x + y$ şi f^{-1} crescătoare avem:

$$f^{-1}(f(f^{-1}(x) + y)) \geq f^{-1}(x + y),$$

de unde rezultă $f^{-1}(x + y) \leq f^{-1}(x) + y$. .... **1 punct**

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 9 februarie 2024
Soluţii

Clasa a XI-a

1. Fie matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ cu proprietăţile: $\det(A) = 0$ şi $\det(A+I_2) = 1$. Demonstraţi:

   (a) $A^2 = O_2$.

   (b) $\det(A + kI_2)$ este pătrat perfect, pentru oricare $k \in \mathbb{Z}$.

Ovidiu Pop

Soluţie.

(a) Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Conform ipotezei, $ad - bc = 0$ şi $(a+1)(d+1) - bc = 1$.
Rezultă $\text{tr}(A) = a + d = 0$ .... **2 puncte**
Cum $A^2 - \text{tr}(A) \cdot A + \det(A) \cdot I_2 = 0$, avem $A^2 = O_2$ .... **2 puncte**

(b) $\det(A + kI_2) = \det(A) + k \cdot \text{tr}(A) + k^2 = k^2$ - pătrat perfect........ **3 puncte**

2. Fie $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ astfel încât $X^{2023} = A$.

   (a) Demonstraţi că $AX = XA$.

   (b) Determinaţi matricea X.

Gazeta Matematică, enunţ modificat

Soluţie.

(a) $AX = X^{2024} = XA$ .... **2 puncte**

(b) Din relaţia $AX = XA$, rezultă $X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$, $a, b, c \in \mathbb{Z}$.......... **1 punct**
Din $X^{2023} = A \Rightarrow \det(X^{2023}) = \det(A) \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 1$ ... **1 punct**
Deci, $(a + b + c)[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2] = 2$ .... **1 punct**
Cum $a, b, c \in \mathbb{Z}$, şi $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0$, sunt posibile cazurile:

   i. $\begin{cases} a + b + c = 2 \\ (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 1 \end{cases}$. Sistem fără soluţii în $\mathbb{Z}$ ...**1 punct**

ii. $\begin{cases} a+b+c=1 \\ (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=2 \end{cases}$,
cu soluţiile întregi $(a,b,c) \in \{(1;0;0),(0;1;0),(0;0;1)\}$.

În consecinţă, $X \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Ecuaţia $X^{2023} = A$ este verificată doar de $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A$ .... **1 punct**

3. (a) Demonstraţi că $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sin x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{2}$.

   (b) Fie şirul de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$, definit prin

$$x_n = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{(1-\sin x)(1-\sin^2 x)(1-\sin^3 x)\cdot \ldots \cdot (1-\sin^n x)}{\cos^{2n} x}, \qquad n \geq 1.$$

   Demonstraţi că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este divergent.

⋆⋆⋆

Soluţie.

(a) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sin x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{2}$. .... **3 puncte**

(b) $x_n = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \prod\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1-\sin^k x}{\cos^2 x} = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{(1-\sin x)\sum\limits_{i=0}^{k-1} \sin^i x}{\cos^2 x} = \prod\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k}{2} = \dfrac{n!}{2^n}$ ....**3 puncte**

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \infty$ implică $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, deci $(x_n)_{n\geq 1}$ este divergent ..... **1 punct**

4. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale strict pozitive, cu proprietatea $a_{n+1} = 2^{-a_n}$, pentru $n \in \mathbb{N}^*$. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2^{-x}$. Presupunem cunoscut faptul că ecuaţia $(f \circ f)(x) = x$ admite o soluţie unică $x_0 \in (0,1)$. Demonstraţi că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

Romeo Ilie

Soluţie.
Prin inducţie, se demonstrează $a_n \in (0,1)$, $\forall n \geq 2$........................... **1 punct**
Avem $a_{n+1} = f(a_n)$, $n \in \mathbb{N}^*$. Rezultă $a_{n+2} = (f \circ f)(a_n)$, $n \in \mathbb{N}^*$ .... **1 punct**
Funcţia f este strict descrescătoare. Rezultă că funcţia $f \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este strict crescătoare .... **1 punct**

Deducem că subşirurile $(a_{2n})_{n\geq 1}$ şi $(a_{2n-1})_{n\geq 1}$ sunt monotone, cu tipul de monotonie indicat de ordinea primilor doi termeni ai fiecărui subşir (demonstraţie prin inducţie) şi mărginite, deci convergente .... **2 puncte**
Fie $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} \in [0,1]$. Trecând la limită în relaţia $a_{2n+2} = (f \circ f)(a_{2n}) = 2^{-2^{-a_{2n}}}$ obţinem $\ell = 2^{-2^{-\ell}} = (f \circ f)(\ell)$. Conform enunţului, $\ell = x_0$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = x_0$. Analog demonstrăm $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n-1} = x_0$. Rezultă că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent, cu limita x_0 .... **2 puncte**

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 9 februarie 2024
Soluţii

Clasa a XII-a

1. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ şi mulţimea $G = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{b}{4}\right\}$. Definim pe $\mathbb{R}$ operaţia "$\star$" prin

$$x \star y = a(x^2 + y^2) + 4xy + (b^2 - 6)x + by + \frac{1-b}{2}, \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

(a) Determinaţi $a, b \in R$, astfel încât restricţia operaţiei "$\star$" la mulţimea G să determine pe G o structură de grup abelian.

(b) Calculaţi $\underbrace{x \star x \star ... \star x}_{\text{de } n \text{ ori}}$, $x \in G$, $n \in \mathbb{N}^*$, în ipoteza că $(G, \star)$ este grup abelian.

Ioana Maşca

Soluţie.

(a) Condiţia $x \star y = y \star x$, $\forall x, y \in G$ este echivalentă cu $b^2 - 6 = b$, de unde obţinem $b \in \{-2, 3\}$. .... **1 punct**
Pentru $e \in G$, condiţia $x \star e = x$, $\forall x \in G$ implică $a = 0$............... **1 punct**

i. Pentru $a = 0$ şi $b = -2$, avem:
$x \star y = 4xy - 2x - 2y + \frac{3}{2}$, $x \star y = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}$, $\forall x, y \in G = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$.
Deoarece $\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right) \neq 0$, $\forall x, y \neq \frac{1}{2}$, mulţimea $G = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu "$\star$". Se verifică elementar că operaţia "$\star$" este asociativă, admite elementul neutru $e = \frac{3}{4} \in G$ şi orice element $x \in G$ este simetrizabil, cu simetricul $x' = \frac{1}{2} + \frac{1}{16\left(x - \frac{1}{2}\right)} \in G$..................**2 puncte**

ii. Pentru $a = 0$ şi $b = 3$, avem:
$x \star y = 4xy + 3x + 3y - 1 = 4\left(x + \frac{3}{4}\right)\left(y + \frac{3}{4}\right) - \frac{13}{4}$, $\forall x, y \in G = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{4}\right\}$.
Operaţia astfel definită nu este asociativă.........................**1 punct**

(b) $(G, \star)$ este grup abelian pentru $a = 0$ şi $b = -2$. Se demonstrează prin inducţie după $n \in \mathbb{N}^*$ relaţia $\underbrace{x \star x \star ... \star x}_{\text{de } n \text{ ori}} = 4^{n-1}\left(x - \frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2}$, $\forall x \in G$. . ...**2 puncte**

2. Fie $(G, \cdot)$ un grup finit, $\text{card}(G) = n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Arătaţi că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(a) $(G, \cdot)$ este grup comutativ.

(b) $x^{n-1} \cdot y^{n-1} = (x \cdot y)^{n-1}$, $\forall\, x, y \in G$.

(c) $x^{n-2} \cdot y^{n-2} = (y \cdot x)^{n-2}$, $\forall\, x, y \in G$.

Ovidiu Pop

Soluţie. Evident, (a) $\Rightarrow$ (b) şi (a) $\Rightarrow$ (c) .... **1 punct**
Au loc relaţiile:
$\mathrm{card}(G) = n \;\Rightarrow\; a^n = e,\ \forall\, a \in G \;\Rightarrow\; a^{n-1} = a^{-1},\ \forall\, a \in G$ .... **1 punct**
$a^{n-2} = a^{-2}$, $\forall\, a \in G$, unde $a^{-2} = \left(a^{-1}\right)^2$ .... **1 punct**
$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1},\ \forall\, a, b \in G$ .... **1 punct**
(b) $\Rightarrow$ (a).
Fie $x, y \in G$. Avem

$$xy = \left(x^{-1}\right)^{-1}\left(y^{-1}\right)^{-1} = \left(x^{-1}\right)^{n-1}\left(y^{-1}\right)^{n-1} \overset{(b)}{=} \left(x^{-1}y^{-1}\right)^{n-1} =$$
$$= \left(x^{-1}y^{-1}\right)^{-1} = \left(y^{-1}\right)^{-1}\left(x^{-1}\right)^{-1} = yx.$$

.... **2 puncte**
(c) $\Rightarrow$ (a).
Fie $x, y \in G$. Avem

$$x^{-1}x^{-1}y^{-1}y^{-1} = x^{-2}y^{-2} = x^{n-2}y^{n-2} \overset{(c)}{=} (yx)^{n-2} = (yx)^{-2} =$$
$$= \left((yx)^{-1}\right)^2 = \left(x^{-1}y^{-1}\right)^2 = x^{-1}y^{-1}x^{-1}y^{-1}.$$

Din relaţia de mai sus, obţinem (după simplificări): $x^{-1}y^{-1} = y^{-1}x^{-1}$, de unde, prin inversare, deducem $yx = xy$. .... **1 punct**

3. Fie $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi $F : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ o primitivă a lui f cu proprietatea că $F(x) + x \cdot f(x) \cdot \ln x \geq 0$, $\forall\, x > 0$. Demonstraţi că orice primitivă a funcţiei F este monotonă.

Romeo Ilie

Soluţie.
Definim funcţia $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = F(x) \ln x,\ \forall\, x > 0$.

$$g'(x) = \left(F(x) \ln x\right)' = f(x) \ln x + \frac{F(x)}{x} = \frac{F(x) + xf(x) \ln x}{x} \geq 0,\ \forall\, x > 0.$$

Rezultă că funcţia g este monoton crescătoare pe $(0, \infty)$ .... **2 puncte**
$g(1) = 0$ .... **1 punct**
$x \in (0, 1) \Rightarrow g(x) \leq 0 \Rightarrow F(x) \ln x \leq 0 \Rightarrow F(x) \geq 0$ .... **1 punct**
$x \in (1, \infty) \Rightarrow g(x) \geq 0 \Rightarrow F(x) \ln x \geq 0 \Rightarrow F(x) \geq 0$ .... **1 punct**
Prin continuitate, rezultă $F(1) \geq 0$. Astfel, $F(x) \geq 0,\ \forall\, x > 0$........... **1 punct**
Atunci, orice primitivă a funcţiei F este monoton crescătoare............ **1 punct**

4. Calculaţi $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{1+e^{2x-1}}\,\mathrm{d}x$.

Gazeta Matematică

Soluţie.

Notăm $I = \displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{1+e^{2x-1}}\,\mathrm{d}x$.

Cu schimbarea de variabilă $y = 1 - x$, obţinem:

$$I = \int_1^0 \frac{\sin(\pi - \pi y)}{1+e^{1-2y}}(1-y)'\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{e^{2y-1}\sin(\pi y)}{e^{2y-1}+1}\,\mathrm{d}y.$$

.... **3 puncte**

Rezultă:

$$2I = \int\limits_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{1+e^{2x-1}}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{e^{2x-1}\sin(\pi x)}{e^{2x-1}+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \sin(\pi x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)\Big|_0^1 = \frac{2}{\pi}.$$

.... **3 puncte**

Atunci $I = \dfrac{1}{\pi}$ .... **1 punct**