OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 9 februarie 2024

Clasa a IX-a

1. Fie numerele reale strict pozitive $a_1, a_2, ..., a_n$, astfel încât $\dfrac{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_k^2}{a_1 + a_2 + ... + a_k} = \dfrac{2k+1}{3}$, pentru oricare $k \in \{1, 2, ..., n\}$. Demonstraţi că $a_1^3 + a_2^3 + ... + a_n^3 = (a_1 + a_2 + ... + a_n)^2$.

Romeo Ilie

2. Arătaţi că:

   (a) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} \geq \dfrac{4}{x+y}$, pentru oricare $x, y > 0$;

   (b) $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} \geq \dfrac{2(a+b)}{a+b+2c}$, pentru oricare $a, b, c > 0$.

Ovidiu Pop

3. Fie $ABCD$ un paralelogram şi punctele $M \in (AB)$, $N \in (BC)$, $P \in (CD)$ astfel încât $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BN} = \frac{5}{6}\overrightarrow{BC}$ şi $\overrightarrow{DP} = \frac{1}{6}\overrightarrow{DC}$. Arătaţi că centrul de greutate al triunghiului MNP se află pe dreapta AC.

Gazeta Matematică

4. (a) Demonstraţi identitatea: $[x] + \left[x + \frac{1}{2}\right] = [2x]$, pentru oricare $x \in \mathbb{R}$.

   (b) Rezolvaţi ecuaţia: $\left[x + \frac{1}{2}\right] + \left[2x + \frac{1}{2}\right] + \left[4x + \frac{1}{2}\right] + \left[8x + \frac{1}{2}\right] + ... + \left[2^{100}x + \frac{1}{2}\right] = 0$.

   ($[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a)

Florin Cârstea

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect valorează 7 puncte.
Timp de lucru 3 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 9 februarie 2024

Clasa a X-a

1. Fie numărul real $a = \sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[8]{3} \cdot ... \cdot \sqrt[2^{2024}]{3}$.

   (a) Demonstraţi că $[a] = 2$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului a.

   (b) Aflaţi cel mai mic număr $n \in \mathbb{N}^*$, pentru care $a^1 \cdot a^2 \cdot a^3 \cdot ... \cdot a^n \in \mathbb{Q}$.

⋆⋆⋆

2. Considerăm numerele complexe z_1, z_2, z_3, de modul egal cu 1, cu proprietatea că

$$z_1 + z_2 + z_3 = z_1 z_2 z_3 = 1.$$

   (a) Arătaţi că $(1 - z_1)(1 - z_2)(1 - z_3) = 0$.

   (b) Determinaţi tripletele (z_1, z_2, z_3) cu proprietatea din enunţ.

⋆⋆⋆

3. Fie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definită prin $f(n) = \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n+1}{5}\right]$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Arătaţi că f nu este surjectivă.

   (b) Determinaţi $m \in N$ pentru care ecuaţia $f(x) = m$ are soluţie unică.

   ($[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x)

Gazeta Matematică

4. Fie $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ o funcţie surjectivă cu proprietatea

$$f(x + y) \geq f(x) + y, \text{ pentru oricare } x, y \geq 0.$$

   Demonstraţi că:

   (a) f este inversabilă;

   (b) $f^{-1}(x + y) \leq f^{-1}(x) + y$, pentru oricare $x, y \geq 0$, unde $f^{-1} : [0, \infty) \to [0, \infty)$ este inversa funcţiei f.

Romeo Ilie

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect valorează 7 puncte.
Timp de lucru 3 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 9 februarie 2024

Clasa a XI-a

1. Fie matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ cu proprietăţile: $\det(A) = 0$ şi $\det(A+I_2) = 1$. Demonstraţi:
   (a) $A^2 = O_2$.
   (b) $\det(A + kI_2)$ este pătrat perfect, pentru oricare $k \in \mathbb{Z}$..

Ovidiu Pop

2. Fie $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ astfel încât $X^{2023} = A$.
   (a) Demonstraţi că $AX = XA$.
   (b) Determinaţi matricea X.

Gazeta Matematică, enunţ modificat

3. (a) Demonstraţi că $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1 - \sin x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{2}$.
   (b) Fie şirul de numere reale $(x_n)_{n \geq 1}$, definit prin
$$x_n = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \sin x)(1 - \sin^2 x)(1 - \sin^3 x) \cdot ... \cdot (1 - \sin^n x)}{\cos^{2n} x}, \qquad n \geq 1.$$
   Demonstraţi că şirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este divergent.

⋆ ⋆ ⋆

4. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ un şir de numere reale strict pozitive, cu proprietatea $a_{n+1} = 2^{-a_n}$, pentru $n \in \mathbb{N}^*$. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2^{-x}$. Presupunem cunoscut faptul că ecuaţia $(f \circ f)(x) = x$ admite o soluţie unică $x_0 \in (0, 1)$. Demonstraţi că şirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este convergent.

Romeo Ilie

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect valorează 7 puncte.
Timp de lucru 3 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 9 februarie 2024

Clasa a XII-a

1. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ şi mulţimea $G = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{b}{4}\right\}$. Definim pe $\mathbb{R}$ operaţia "$\star$" prin

$$x \star y = a(x^2 + y^2) + 4xy + (b^2 - 6)x + by + \frac{1-b}{2}, \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

   (a) Determinaţi $a, b \in R$, astfel încât restricţia operaţiei "$\star$" la mulţimea G să determine pe G o structură de grup abelian.

   (b) Calculaţi $\underbrace{x \star x \star ... \star x}_{\text{de } n \text{ ori}}$, $x \in G$, $n \in \mathbb{N}^*$, în ipoteza că $(G, \star)$ este grup abelian.

Ioana Maşca

2. Fie $(G, \cdot)$ un grup finit, $\mathrm{card}(G) = n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Arătaţi că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

   (a) $(G, \cdot)$ este grup comutativ.

   (b) $x^{n-1} \cdot y^{n-1} = (x \cdot y)^{n-1}$, $\forall\, x, y \in G$.

   (c) $x^{n-2} \cdot y^{n-2} = (y \cdot x)^{n-2}$, $\forall\, x, y \in G$.

Ovidiu Pop

3. Fie $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi $F : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ o primitivă a lui f cu proprietatea că $F(x) + x \cdot f(x) \cdot \ln x \geq 0$, $\forall\, x > 0$. Demonstraţi că orice primitivă a funcţiei F este monotonă.

Romeo Ilie

4. Calculaţi $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{1 + e^{2x-1}}\, \mathrm{d}x$.

Gazeta Matematică

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect valorează 7 puncte.
Timp de lucru 3 ore.