OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ –
10.02.2024

CLASA a V -a

SOLUȚII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.

1. Bunicul are şapte nepoți: Andrei, Bogdan, Costin, Dan, Emil, Florin şi Gabriel. Vârsta bunicului este de 74 de ani şi este egală cu suma vârstelor nepoților săi. Vârstele lui Andrei, Bogdan, Costin, Dan, Emil şi Florin sunt numere pare consecutive, iar Gabriel are un frate geamăn. Ştiind că Andrei este cel mai mic dintre frați, aflați câți ani are Gabriel şi cum se numeşte fratele său geamăn.

Soluție:

Notăm cu $2x$ vârsta lui Andrei şi cu y vârsta lui Gabriel.

Avem $2x + (2x + 2) + (2x + 4) + (2x + 6) + (2x + 8) + (2x + 10) + y = 74$, deci $12x + y = 44$.

Cum $12x \leq 44$, x poate fi 0, 1, 2 sau 3.

Dacă $x = 0$, atunci $y = 44 > 2x + 10$, deci Gabriel nu are niciun frate geamăn.

Dacă $x = 1$, atunci $y = 32 > 2x + 10$, deci Gabriel nu are niciun frate geamăn.

Dacă $x = 2$, atunci $y = 20 > 2x + 10$, deci Gabriel nu are niciun frate geamăn.

Dacă $x = 3$, atunci $y = 8 = 2x + 2$, deci fratele geamăn al lui Gabriel este Bogdan.

Detalii de rezolvare	Barem asociat
$2x$- vârsta lui Andrei, y- vârsta lui Gabriel. $2x + (2x + 2) + (2x + 4) + (2x + 6) + (2x + 8) + (2x + 10) + y = 74$	1p
Se obține $12x + y = 44$	1p
$12x \leq 44$, deci x poate fi 0, 1, 2 sau 3	1p
$x = 0$, $y = 44 > 2x + 10$, fals	1p
$x = 1$, $y = 32 > 2x + 10$, fals	1p
$x = 2$, $y = 20 > 2x + 10$, fals	1p
$x = 3$, $y = 8 = 2x + 2$, deci fratele geamăn al lui Gabriel este Bogdan	1p

2. a) Arătați că $13^2 = 12^2 + 5^2$.

b) Arătați că 13^{2024} se poate scrie ca sumă de două pătrate ale unor numere naturale.

c) Arătați că 13^{2024} se poate scrie ca sumă de trei pătrate ale unor numere naturale.

Soluție:

a) Se obține egalitatea prin calcul direct.

b) Rescriem 13^{2024} folosind relația de la pct. a)

$$\mathbf{13^{2024} = 13^{2022} \cdot 13^2 = 13^{2022} \cdot (12^2 + 5^2) = (13^{1011})^2 \cdot (12^2 + 5^2) =}$$
$$\mathbf{= (13^{1011})^2 \cdot 12^2 + (13^{1011})^2 \cdot 5^2 = (13^{1011} \cdot 12)^2 + (13^{1011} \cdot 5)^2}$$

c) Cum $5^2 = 3^2 + 4^2$, obținem $13^2 = 12^2 + 3^2 + 4^2$, iar după rescriere ca și la pct. b) vom avea $13^{2024} = (13^{1011} \cdot 12)^2 + (13^{1011} \cdot 3)^2 + (13^{1011} \cdot 4)^2$.

Detalii de rezolvare	**Barem asociat**
a) Calcul direct	1p
b) $13^{2024} = 13^{2022} \cdot 13^2 = 13^{2022} \cdot (12^2 + 5^2)$	1p
$13^{2024} = (13^{1011})^2 \cdot (12^2 + 5^2) = (13^{1011})^2 \cdot 12^2 + (13^{1011})^2 \cdot 5^2$	1p
Obține $13^{2024} = (13^{1011} \cdot 12)^2 + (13^{1011} \cdot 5)^2$	1p
c) $13^2 = 12^2 + 3^2 + 4^2$	1p
$13^{2024} = 13^{2022} \cdot 13^2 = (13^{1011})^2 \cdot (12^2 + 3^2 + 4^2) =$........................ ..	1p
Obține $13^{2024} = (13^{1011} \cdot 12)^2 + (13^{1011} \cdot 3)^2 + (13^{1011} \cdot 4)^2$	1p

3. Determinaţi restul şi ultima cifră a câtului obţinut prin împărţirea numărului $A = 2024^{4n+3} + 2024^{4n+2} \cdot 96 + 199$ la 10.

Soluție:

Se rescrie numărul A în forma:

$$A = 2024^{4n+3} + 2024^{4n+2} \cdot 96 + 199 = 2024^{4n+2}(2024 + 96) + 199$$

$$A = 2024^{4n+2} \cdot 2120 + 190 + 9 = 10 \cdot (2024^{4n+2} \cdot 212 + 19) + 9.$$

Se obține de aici că restul împărțirii lui A la 10 este 9, iar câtul este $2024^{4n+2} \cdot 212 + 19$.

Pentru ultima cifră a câtului avem:

$$U(2024^{4n+2} \cdot 212 + 19) = U(U(2024^{4n+2}) \cdot U(212) + U(19)) = U(6 \cdot 2 + 9) = 1.$$

Detalii de rezolvare	**Barem asociat**
$A = 2024^{4n+3} + 2024^{4n+2} \cdot 96 + 199 = 2024^{4n+2}(2024 + 96) + 199$	2p
$A = 2024^{4n+2} \cdot 2120 + 190 + 9$	1p
$A = 10 \cdot (2024^{4n+2} \cdot 212 + 19) + 9$	1p
Restul împărțirii la 10 este 9, iar câtul este $2024^{4n+2} \cdot 212 + 19$	1p
$U(2024^{4n+2} \cdot 212 + 19) = U(U(2024^{4n+2}) \cdot U(212) + U(19))$	1p
$U(2024^{4n+2} \cdot 212 + 19) = U(6 \cdot 2 + 9) = 1$	1p

4. Pentru orice număr natural *n* mai mare sau egal cu 10, notăm cu *S(n)* suma cifrelor lui *n*.

a) Dacă $S(\overline{ab})=16$ și $S(\overline{bc})=15$, determinați $S(\overline{ab}+\overline{bc})$.

b) Dacă $S(\overline{ab})=15$ și $S(\overline{ab}+\overline{bc})=12$, determinați $S(\overline{ac})$.

Soluție:

a) Avem $S(\overline{ab})=a+b=16$ și $S(\overline{bc})=b+c=15$.

Cum $\overline{ab}+\overline{bc}=10a+b+10b+c=10\cdot(a+b)+b+c=175$, obținem că $S(\overline{ab}+\overline{bc})=13$.

b) Avem $S(\overline{ab})=a+b=15$.

Notăm $n=\overline{ab}+\overline{bc}$, de unde rezultă că $n=10\cdot(a+b)+b+c=150+b+c$.

Cum *b, c* sunt cifre, iar $b\neq 0$, $b+c$ poate fi 1, 2, 3, ... , 18.

Obținem că *n* poate fi 151, 152, 153, ... , 168.

Dar $S(n)=12$, deci n poate fi 156 sau 165.

Cazul 1. Dacă $n = 156$, cum $150+b+c=156$, iar $b\geq 6$, se obține:

- $b = 6$, $c = 0$ și $a = 9$, deci $S(\overline{ac}) = a + c = 9$.

Cazul 2. Dacă $n = 165$, cum $150+b+c=165$, se obține $b + c = 15$.

Dar $a + b = 15$, deci $a = c$.

- Dacă $b = 6$, obținem $a = c = 9$, de unde $a + c = 18$.
- Dacă $b = 7$, obținem $a = c = 8$, de unde $a + c = 16$.
- Dacă $b = 8$, obținem $a = c = 7$, de unde $a + c = 14$.
- Dacă $b = 9$, obținem $a = c = 6$, de unde $a + c = 12$.

Deci $S(\overline{ac})$ poate fi 9, 12, 14, 16 sau 18.

Detalii de rezolvare	Barem asociat
a) $S(\overline{ab})=a+b=16$ și $S(\overline{bc})=b+c=15$	1p
$\overline{ab}+\overline{bc}=10\cdot(a+b)+b+c=175$, deci $S(\overline{ab}+\overline{bc})=13$	1p
b) $S(\overline{ab})=a+b=15$. Notăm $n=\overline{ab}+\overline{bc}=10\cdot(a+b)+b+c=150+b+c$	1p
Obține că *n* poate fi 151, 152, 153, ... , 168..	1p
Cum $S(n)=12$, n poate fi 156 sau 165	1p
Dacă $n = 156$, obține că $S(\overline{ac})=9$	1p
Dacă $n = 165$, obține că $S(\overline{ac})$ poate fi 12, 14, 16, 18	1p

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ –
10.02.2024

CLASA a VI -a

SOLUȚII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.

1. Se consideră numerele $a=3n+5$, $b=2n+3$, $c=n+2$, $n\in\mathbb{N}$. Demonstrați că $(a-1)^2<[a,b]+[a,c]<(a+1)^2$, unde $[a,b]$ reprezintă cel mai mic multiplu comun al numerelor a și b.

Soluție:

Demonstrăm că oricare două numere dintre numerele a, b și c sunt prime între ele.

Fie $d=(a,b)$, $d\in\mathbb{N}^*$. Atunci avem că $d\,|\,3n+5$ și $d\,|\,2n+3$. Folosind proprietățile relației de divizibilitate avem că

$\left.\begin{array}{l} d\,|\,2(3n+5) \\ d\,|\,3(2n+3)\end{array}\right\}\Rightarrow d\,|\,6n+10-6n-9$, adică $d\,|\,1$, ceea ce înseamnă că $d=1$, iar numerele a și b sunt prime între ele, adică $(a,b)=1$. În mod analog se demonstrează că $(a,c)=1$, respectiv $(b,c)=1$.

Folosind proprietatea că $[a,b]\cdot(a,b)=a\cdot b$ și faptul că numerele sunt prime între ele, obținem că $[a,b]=a\cdot b$ și $[a,c]=a\cdot c$.

Înlocuind în inegalitatea dată obținem

$$(3n+5-1)^2<(3n+5)(2n+3)+(3n+5)(n+2)<(3n+5+1)^2$$

de unde avem că $(3n+4)^2<(3n+5)^2<(3n+6)^2$, inegalitate evident adevărată.

Detalii de rezolvare	Barem asociat
Demonstrează că oricare două dintre numerele a, b și c sunt prime între ele	3p
Precizează că $[a,b]=a\cdot b$ și $[a,c]=a\cdot c$	2p
$(3n+5-1)^2<(3n+5)(2n+3)+(3n+5)(n+2)<(3n+5+1)^2$	1p
$(3n+4)^2<(3n+5)^2<(3n+6)^2$, deci $(a-1)^2<[a,b]+[a,c]<(a+1)^2$, ...	1p

2. a) Se consideră proporția $\frac{a}{3}=\frac{b}{4}$, unde a și b sunt numere raționale strict pozitive.

Să se calculeze valoarea raportului $\frac{a^2+b^2}{5ab}$.

b) Determinați numerele naturale nenule a, b și c care verifică proporțiile: $\frac{a}{5b}=\frac{5}{c}$, $\frac{c}{10a}=\frac{5a}{b}$ și $\frac{50}{8c}=\frac{1}{ab}$.

Soluție:

a) Din $\frac{a}{3}=\frac{b}{4}=k$ rezultă $a=3k$ și $b=4k$.

Valoarea raportului $\frac{a^2+b^2}{5ab}=\frac{9k^2+16k^2}{5\cdot 3k\cdot 4k}=\frac{25k^2}{60k^2}=\frac{5}{12}$.

b) Din $\frac{a}{5b}=\frac{5}{c}$ avem că $ac=25b$ de unde $4ac=100b$ (1).

Din $\frac{50}{8c}=\frac{1}{ab}$ avem $8c=50ab$ de unde $4ac=25a^2b$ (2).

Din (1) și (2) avem că $100=25a^2$ de unde $a^2=4$, deci $a=2$ (3).

Pentru $a=2$ relația $\frac{c}{10a}=\frac{5a}{b}$ devine $\frac{c}{20}=\frac{10}{b}\Leftrightarrow bc=200\Leftrightarrow 2bc=400$ (4).

Din (2) și (3) avem $8c=100b\Leftrightarrow 2c=25b$ iar relația (4) devine $25b^2=400$ de unde $b^2=16$, adică $b=4$ și $c=50$.

Detalii de rezolvare	**Barem asociat**
a) Deduce că $a=3k$ și $b=4k$	1p
Argumentează că $\frac{a^2+b^2}{5ab}=\frac{5}{12}$	1p
b) Deduce că $4ac=100b$ (1)	1p
Deduce că $4ac=25a^2b$ (2)	1p
Argumentează că $a=2$	1p
Argumentează că $b=4$	1p
Argumentează că $c=50$	1p

3. a) Aflați perechile de numere naturale care au produsul 1215 și cel mai mare divizor comun este 9.

b) Două drepte paralele tăiate de o secantă formează opt unghiuri astfel încât trei dintre acestea au suma măsurilor egală cu 276^0. Determinați măsurile unghiurilor.

Soluție:

a) Fie a și b cele două numere naturale. Din $(a,b)=9$ avem $a=9\cdot k$ și $b=9\cdot p$, unde $(k,p)=1$ și $k,p\in\mathbb{N}^*$. Cum $a\cdot b=1215$ avem $k\cdot p=15$, $(k,p)=1$ și $k,p\in\mathbb{N}^*$, de unde distingem următoarele cazuri:

1) $k=1$ și $p=15$ de unde avem $a=9$ și $b=135$;

2) $k=3$ și $p=5$ de unde avem $a=27$ și $b=45$

3) $k=5$ și $p=3$ de unde avem $a=45$ și $b=27$;

4) $k=15$ și $p=1$ de unde avem $a=135$ și $b=9$;

Avem că $(a,b)\in\{(9,135),(27,45),\ (45,27),\ (135,9)\}$.

b) Notăm cu x și y măsurile celor două tipuri de unghiuri care se formează și considerăm $x>y$. Evident, $x+y=180^0$ și avem două cazuri

Cazul I. $3x=276^0 \Rightarrow x=92^0$ și $y=180^0-92^0=88^0$

Cazul II. $2x+y=276^0$ și cum $x+y=180^0$ avem că $x=276^0-180^0=96^0$ și $y=276^0-2\cdot 96^0=84^0$

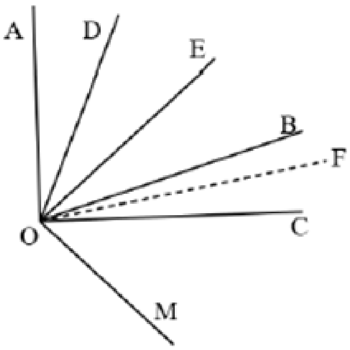
Detalii de rezolvare	**Barem asociat**
a) Din $(a,b)=9$ avem $a=9\cdot k$ și $b=9\cdot p$, unde $(k,p)=1$ și $k,p\in\mathbb{N}^*$	1p
Deducem că $k\cdot p=15$	1p
Discută fiecare caz posibil și precizează că $(a,b)\in\{(9,135),(27,45),(45,27),\ (135,9)\}$	2p
b) Notează cu x și y, $x>y$ măsurile celor două tipuri de unghiuri și precizează că $x+y=180^0$	1p
Identifică cazurile $3x=276^0$ și $2x+y=276^0$	1p
Finalizare: $x=92^0$ și $y=88^0$ sau $x=96^0$ și $y=84^0$	1p

4. Se consideră unghiurile adiacente și complementare AOB și BOC, punctele $D,\ E$ în interiorul unghiului AOB astfel încât $\sphericalangle AOD \equiv \sphericalangle DOE \equiv \sphericalangle EOB$, OF bisectoarea unghiului BOC și $\sphericalangle DOF = 56^0$.

a) Determinați măsurile unghiurilor AOB și BOC.

b) Dacă $OM \perp OE$ astfel încât punctul C să fie în interiorul unghiului BOM, arătați că semidreapta OF este bisectoarea unghiului DOM.

Soluție



a) Din faptul că unghiurile AOB și BOC sunt adiacente și complementare avem că $\sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC = 90^0$, (1).

Notăm $\sphericalangle AOD = \sphericalangle DOE = \sphericalangle EOB = x \Rightarrow \sphericalangle AOB = 3x$, (2).

Din faptul că OF este bisectoarea unghiului BOC avem $\sphericalangle BOF = \sphericalangle FOC = y \Rightarrow \sphericalangle BOC = 2y$, (3).

$\sphericalangle DOF = \sphericalangle DOE + \sphericalangle EOB + \sphericalangle BOF = x + x + y = 2x + y$ de unde avem $2x + y = 56^0$, (4). Din relațiile (1), (2) și (3) avem $3x + 2y = 90^0$, (5).

Înmulțind relația (5) cu 2, relația (4) cu 3 și scăzând membru cu membru obținem

$$\left.\begin{matrix} 6x + 4y = 180^0 \\ 6x + 3y = 168^0 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow y = 12^0 \text{ și } x = (180^0 - 4 \cdot 12^0) : 6 = 22^0$$

De unde avem $\sphericalangle AOB = 3x = 3 \cdot 22^0 = 66^0$ și $\sphericalangle BOC = 2y = 2 \cdot 12^0 = 24^0$.

b) $OM \perp OE \Rightarrow \sphericalangle EOM = 90^0$

$\sphericalangle EOB + \sphericalangle BOC + \sphericalangle COM = 90^0 \Rightarrow 22^0 + 24^0 + \sphericalangle COM = 90^0 \Rightarrow \sphericalangle COM = 44^0$.

Avem $\sphericalangle MOF = \sphericalangle COM + \sphericalangle COF = 44^0 + 12^0 = 56^0$ și $\sphericalangle DOF = 56^0$, atunci $\sphericalangle MOF = \sphericalangle DOF$.

Cum $\sphericalangle MOF = \sphericalangle DOF$ și $OF \subset Int(\sphericalangle DOM) \Rightarrow OF$ este bisectoarea unghiului DOM.

Detalii de rezolvare	**Barem asociat**
a) Figura corespunzătoare datelor din problemă	1p
Precizează că $\sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC = 90^0$	1p
Notează $\sphericalangle AOD = \sphericalangle DOE = \sphericalangle EOB = x$ și $\sphericalangle BOF = \sphericalangle FOC = y$ de unde deduce că $\sphericalangle AOB = 3x$ respective $\sphericalangle BOC = 2y$	1p
Determină $x = 22^0$ și $y = 12^0$	1p
Află că $\sphericalangle AOB = 66^0$ și $\sphericalangle BOC = 24^0$...	1p
b) Arată că $\sphericalangle COM = 44^0$	1p
Argumentează că $\sphericalangle MOF = \sphericalangle DOF = 56^0$, iar $OF \subset Int(\sphericalangle DOM) \Rightarrow OF$ este bisectoarea unghiului DOM	1p

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ –
10.02.2024

CLASA a VII -a

SOLUȚII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.

1. Se consideră numărul :

$$a=\left(\frac{1}{\sqrt{99}}-\frac{1}{\sqrt{44}}+\frac{1}{\sqrt{176}}\right):\left(-2\sqrt{396}\right)^{-1}$$

Arătați că numărul a este întreg.

Soluție

$$a=\left(\frac{1}{\sqrt{99}}-\frac{1}{\sqrt{44}}+\frac{1}{\sqrt{176}}\right):\left(-2\sqrt{396}\right)^{-1}=\left(\frac{1}{3\sqrt{11}}-\frac{1}{2\sqrt{11}}+\frac{1}{4\sqrt{11}}\right):\left(-\frac{1}{2\cdot 6\sqrt{11}}\right)=$$

$$a=\left(\frac{4}{12\sqrt{11}}-\frac{6}{12\sqrt{11}}+\frac{3}{12\sqrt{11}}\right)\cdot\left(-12\sqrt{11}\right)=\left(\frac{1}{12\sqrt{11}}\right)\cdot\left(-12\sqrt{11}\right)=-1$$

$$a=-1\in\mathbb{Z}$$

Detalii de rezolvare	Barem asociat
$a=\left(\frac{1}{3\sqrt{11}}-\frac{1}{2\sqrt{11}}+\frac{1}{4\sqrt{11}}\right):\left(-\frac{1}{2\cdot 6\sqrt{11}}\right)$ ………………………………………………	2p
$a=\left(\frac{4}{12\sqrt{11}}-\frac{6}{12\sqrt{11}}+\frac{3}{12\sqrt{11}}\right)\cdot\left(-12\sqrt{11}\right)$ ………………………………………………	2p
$a=\left(\frac{1}{12\sqrt{11}}\right)\cdot\left(-12\sqrt{11}\right)=-1$ ………………………………………………………	2p
$a=-1\in\mathbb{Z}$	1p

2. Se consideră triunghiul ABC dreptunghic isoscel, cu m(∡BAC)=90°. Fie D simetricul centrului cercului înscris în triunghiul ABC, față de latura BC. Demonstrați că triunghiul ACD este isoscel.

Soluție:

Triunghiul ABC este isoscel de bază BC, deci centrul cercului înscris se află pe mediatoarea laturii BC.

Fie M mijlocul laturii BC, deci AM= mediatoarea lui BC.

D este simetricul lui I (I = centrul cercului înscris) față de BC, deci BC este mediatoarea segmentului ID.

Rezultă că diagonalele patrulaterului CIBD au același mijloc, deci CIBD este paralelogram și cum diagonalele BC și ID sunt perpendiculare, rezultă că CIBD este romb.

ΔABC este dreptunghic isoscel, de bază BC, rezultă $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ABC = 45^0$;

CI = bisectoarea ∡ACB, rezultă $\sphericalangle ACI = \sphericalangle ICM = \frac{45^0}{2} = 22^0 30'$

În rombul CIBD, (CM=bisectoarea unghiului ∡ICD, rezultă

$\sphericalangle MCD = \sphericalangle ICM = 22^0 30' \Longrightarrow \sphericalangle ACD = 45^0 + 22^0 30' = 67^0 30'$.

În ΔACD, $\sphericalangle ADC = 180^0 - \sphericalangle ACD - \sphericalangle CAD = 180^0 - 67^0 30' - 45^0 = 67^0 30' \Longrightarrow$ $\sphericalangle ACD = \sphericalangle ADC \Longrightarrow \Delta ADC$ este triunghi isoscel.

Detalii de rezolvare	**Barem asociat**
Triunghiul ABC este isoscel de bază BC deci centrul cercului înscris se află pe mediatoarea laturii BC…………………………………………………………	1p
D este simetricul lui I (I = centrul cercului înscris) față de BC, deci BC este mediatoarea segmentului ID..	1p
Argumentează că CIBD este paralelogram...	1p
Argumentează că CIBD este romb...	1p
Deduce măsurile unghiurile ∡ACD și ∡ADC...	2p
Finalizare: triunghiul ACD este isoscel………………………………………..	1p

3. Se consideră rombul ABCD, punctul E situat pe latura AD și prelungim latura AB cu segmentul BF, așa încât BF = DE. Știind că CE = DF iar $\sphericalangle DCE = \sphericalangle BDF$, aflați măsurile unghiurilor rombului ABCD.

Soluție:

Notăm cu T simetricul punctului B față de punctul D.

Deoarece $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle ADB \Longrightarrow \sphericalangle FBD \equiv \sphericalangle EDT$.

Astfel $\Delta FBD \equiv \Delta EDT (L.U.L) \Longrightarrow [DF] \equiv [TE]$ și $\sphericalangle BDF \equiv \sphericalangle DTE$.

Din ipoteză avem [CE] ≡ [DF].

De aici obținem [TE]≡[CE]

$\Longrightarrow$ ΔECT este isoscel cu $\sphericalangle ETC \equiv \sphericalangle ECT$

$\Longrightarrow \sphericalangle DTC \equiv \sphericalangle DCT$, adică ΔDCT este isoscel cu [DC]≡[DT]

$\Longrightarrow$ [DB]≡[DC]

$\Longrightarrow$ ΔBCD este echilateral

$\Longrightarrow m(\sphericalangle BAD) = m(\sphericalangle BCD) = 60^0$

$\Longrightarrow m(\sphericalangle ABC) = m(\sphericalangle ADC) = 180^0 - 60^0 = 120^0$.

Detalii de rezolvare	**Barem asociat**
Demonstrează că $\Delta FBD \equiv \Delta EDT$	2p
Demonstrează că ΔECT este isoscel	2p
Arată că ΔBCD este echilateral..	1p
Determină măsurile unghiurilor $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BCD = 60^0$..................................	1p
Determină măsurile unghiurilor $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ADC = 180^0 - 60^0 = 120^0$..........	1p

4. Se consideră mulțimile $A = \left\{n \in \mathbb{N} \,\middle|\, \frac{4}{3} \leq \frac{n+1}{6} \leq \frac{7}{4}\right\}$ și $B = \left\{n \in \mathbb{N} \,\middle|\, \frac{n^2-4n+8}{n-4} \in \mathbb{N}\right\}$.

Să se determine: $A \cup B$ și $A \cap B$.

Soluție:

Aducând la același numitor comun în relația $\frac{4}{3} \leq \frac{n+1}{6} \leq \frac{7}{4}$ obținem:

$16 \leq 2n + 2 \leq 21 \Leftrightarrow 14 \leq 2n \leq 19 \quad \Leftrightarrow 7 \leq n \leq \frac{19}{2}$; $n \in \mathbb{N} \implies n \in \{7, 8, 9\}$, deci

$A = \{7, 8, 9\}$.

$\frac{n^2-4n+8}{n-4} = \frac{n(n-4)+8}{n-4} = n + \frac{8}{n-4} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow n - 4 \in D_8 = \{1, 2, 4, 8\} \implies$

$\implies n \in \{5, 6, 8, 12\} \implies B = \{5, 6, 8, 12\}$

$\implies A \cup B = \{5, 6, 7, 8, 9, 12\}$ și $A \cap B = \{8\}$.

Detalii de rezolvare	**Barem asociat**
$\frac{4}{3} \leq \frac{n+1}{6} \leq \frac{7}{4} \Leftrightarrow 16 \leq 2n + 2 \leq 21 \Leftrightarrow 14 \leq 2n \leq 19 \Leftrightarrow 7 \leq n \leq \frac{19}{2}$	1p
$n \in \mathbb{N} \implies n \in \{7, 8, 9\} \implies A = \{7, 8, 9\}$	1p
$\frac{n^2 - 4n + 8}{n - 4} = \frac{n(n-4) + 8}{n - 4} = n + \frac{8}{n-4} \in \mathbb{N}$	1p
$n - 4 \in D_8 = \{1, 2, 4, 8\}$	1p
$n \in \{5, 6, 8, 12\} \implies B = \{5, 6, 8, 12\}$	1p
$A \cup B = \{5, 6, 7, 8, 9, 12\}$	1p
$A \cap B = \{8\}$	1p

Strada Corneliu Coposu nr.26, Telefon: 0257 / 28 00 08, Fax 0257 / 21 47 46,
web : www.isjarad.ro e-mail: inf_arad@isjarad.ro

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ –
10.02.2024

CLASA a VIII -a

SOLUȚII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.

1. Se consideră numerele reale *x* și *y*, astfel încât $x \in [-1, 2]$ și $2y = x+1$. Determinați valoarea expresiei : $E = \sqrt{(x+1)^2} + |x-2| + \sqrt{3(2y-3)^2 + (x-2)^2} + \sqrt{(x+1)^2 + 12y^2}$.

Soluție:

Din $2y = x + 1$ se obține $2y - 3 = x - 2$. Expresia E devine:

$$E = |x+1| + |x-2| + \sqrt{3(x-2)^2 + (x-2)^2} + \sqrt{(2y)^2 + 12y^2}$$

$$E = |x+1| + |x-2| + \sqrt{4(x-2)^2} + \sqrt{16y^2} = |x+1| + |x-2| + 2|x-2| + 4|y|$$

$$E = |x+1| + 3|x-2| + 2|2y| = |x+1| + 3|x-2| + 2|x+1| = 3|x+1| + 3|x-2|$$

$$x \in [-1, 2] \Rightarrow -1 \le x \le 2 \Rightarrow 0 \le x+1 \le 3 \Rightarrow |x+1| = x+1$$

$$\Rightarrow -3 \le x-2 \le 0 \Rightarrow |x-2| = 2-x$$

$$E = 3(x+1) + 3(2-x) = 3x+3+6-3x = 9$$

Detalii de rezolvare	Barem asociat
Deduce $E = |x+1| + |x-2| + 2|x-2| + 4|y|$	2p
Deduce $E = 3|x+1| + 3|x-2|$	2p
Argumentează $|x+1| = x+1$ și $|x-2| = 2-x$	2p
Arată că $E = 9$	1p

2. Se consideră tetraedrul $ABCD$ cu lungimile muchiilor AB, BC și CA invers proporționale cu numerele 0,(3); 0,25 și 0,2. Pe muchia CD a tetraedrului se consideră un punct P și se construiește un punct Q care este simetricul lui P față de B. Demonstrați că:

a) $\Delta\, ABC$ este dreptunghic

b) dacă $AP = AQ$, atunci $AB \perp (BCD)$.

Soluție:

a) AB, BC și CA sunt invers proporționale cu numerele 0,(3); 0,25 și 0,2

$\Rightarrow AB \cdot 0,(3) = BC \cdot 0,25 = CA \cdot 0,2 = \text{k}$, rezultă $AB \cdot \frac{1}{3} = BC \cdot \frac{1}{4} = CA \cdot \frac{1}{5} = \text{k}$,

$\Rightarrow AB = 3\text{k}$, $BC = 4\text{k}$, $CA = 5\text{k}$

deci aplicând *R.T.P.* în $\Delta\, ABC$ obținem că triunghiul este dreptunghic cu măsura unghiului ABC egală cu 90°. Prin urmare $AB \perp BC$.

b) Din simetrie rezultă că $PB = BQ$.

Dacă $AP = AQ$, avem că $\Delta\, APQ$ este isoscel.

Cum AB este mediană în $\Delta\, APQ$ isoscel rezultă că $AB \perp PQ$.

Din $AB \perp BC$

$AB \perp PQ$

$BC \cap PQ = \{B\}$

$BC, PQ \subset (BCD) \quad \Rightarrow AB \perp (BCD)$.

Detalii de rezolvare	Barem asociat
a) AB, BC și CA sunt invers proporționale cu numerele 0.(3), 0.25 și 0.2 $\Rightarrow AB = 3\text{k}$, $BC = 4\text{k}$, $CA = 5\text{k}$.	2p
Deci aplicând *R.T.P.* în triunghiul ABC obținem că triunghiul este dreptunghic cu măsura unghiului ABC egală cu 90°. Prin urmare $AB \perp BC$	2p
b) Din simetrie rezultă că $PB = BQ$	1p
Demonstrează că $AB \perp PQ$.	1p
Demonstrează că $AB \perp (BCD)$	1p

3. În cubul $ABCDA'B'C'D'$ punctele M, N și P sunt mijloacele muchiilor BB', $C'D'$ și respectiv $C'B'$. Calculați sinusul unghiului format de dreptele AM și NP.

Soluție:

Fie Q mijlocul segmentului $AA¢$. Cum $QA = MB¢$ și $QA \parallel MB' \Rightarrow AMB'Q$ paralelogram, deci $AM \parallel QB'$.

NP este linie mijlocie în $\Delta B'C'D' \Rightarrow NP \parallel D'B'$

Din $NP \parallel D'B'$ și $AM \parallel QB' \Rightarrow \sphericalangle(AM, NP) \equiv \sphericalangle(QB', B'D') \equiv \sphericalangle D'B'Q$

Se demonstrează că triunghiurile $D'A'Q$ și $B'A'Q$ sunt congruente deci $D'Q = B'Q$

$\Rightarrow \Delta QB'D'$ este isoscel $\Rightarrow QO' \perp B'D'$, unde O' este mijlocul segmentului $D'B'$.

Dacă notăm cu a muchia cubului, aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic $A'B'Q$ obținem $B'Q = \frac{a\sqrt{5}}{2}$ și în $\Delta\, O'B'Q$ obținem $O'Q = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$$sin\sphericalangle(AM, NP) = sin\sphericalangle(D'B'Q) = \frac{QO'}{B'Q} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5}.$$

Detalii de rezolvare	Barem asociat
Demonstrează că $AM \parallel QB'$	1p
Demonstrează că $NP \parallel D'B'$ și $\sphericalangle(AM, NP) \equiv \sphericalangle(QB', B'D') \equiv \sphericalangle D'B'Q$	1p
Demonstrează că $QO' \perp B'D'$, unde O' este mijlocul segmentului $D'B'$	2p
Calculează $B'Q = \frac{a\sqrt{5}}{2}$ și $O'Q = \frac{a\sqrt{3}}{2}$	2p
$sin\sphericalangle(AM, NP) = sin\sphericalangle(D'B'Q) = \frac{QO'}{B'Q} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$	1p

4. Determinați perechile de numere întregi *(x,y)* pentru care are loc relația: $2x^2+5y^2-11xy=-25$.

Soluție:

$2x^2-11xy+5y^2=-25 \Leftrightarrow 2x^2-xy-10xy+5y^2=-25$

$\Leftrightarrow x(2x-y)-5y(2x-y)=-25 \Leftrightarrow (2x-y)(x-5y)=-25$.

Rezultă: $(2x-y)|-25$ *și* $(x-5y)|-25$

Se obțin următoarele cazuri posibile de determinare a lui x și y :

1) $\begin{cases}2x-y=1\\x-5y=-25\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x-y=1\\-2x+10y=50\end{cases} \Rightarrow 9y=51 \Rightarrow y \notin \mathbb{Z}$

2) $\begin{cases}2x-y=-25\\x-5y=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x-y=-25\\-2x+10y=-2\end{cases} \Rightarrow 9y=-27 \Rightarrow y=-3$

$2x+3=-25 \Leftrightarrow 2x=-28 \Rightarrow x=-14$

3) $\begin{cases}2x-y=5\\x-5y=-5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x-y=5\\-2x+10y=10\end{cases} \Rightarrow 9y=15 \Rightarrow y \notin \mathbb{Z}$

4) $\begin{cases}2x-y=-5\\x-5y=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x-y=-5\\-2x+10y=-10\end{cases} \Rightarrow 9y=-15 \Rightarrow y \notin \mathbb{Z}$

5) $\begin{cases}2x-y=-1\\x-5y=25\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x-y=-1\\-2x+10y=-50\end{cases} \Rightarrow 9y=-51 \Rightarrow y \notin \mathbb{Z}$

6) $\begin{cases}2x-y=25\\x-5y=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x-y=25\\-2x+10y=2\end{cases} \Rightarrow 9y=27 \Rightarrow y=3 \Rightarrow x=14$

Soluție: $(x,y) \in \{(-14,-3);(14,3)\}$.

Detalii de rezolvare	**Barem asociat**
Deduce $(2x-y)(x-5y)=-25$	2p
Deduce cele patru cazuri de determinare posibile ale lui *x* și *y*: 1) $\begin{cases}2x-y=1\\x-5y=-25\end{cases}$; 2) $\begin{cases}2x-y=-25\\x-5y=1\end{cases}$; 3) $\begin{cases}2x-y=5\\x-5y=-5\end{cases}$; 4) $\begin{cases}2x-y=-5\\x-5y=5\end{cases}$ 5) $\begin{cases}2x-y=-1\\x-5y=25\end{cases}$ 6) $\begin{cases}2x-y=25\\x-5y=-1\end{cases}$	2p
Rezolvă cele patru sisteme de ecuație: 1) $y\notin\mathbb{Z}$; 2) $y=-3\Rightarrow x=-14$; 3) $y\notin\mathbb{Z}$; 4) $y\notin\mathbb{Z}$; 5) y nu este întreg; 6) $x = 14$, $y = 3$	2p
Soluția problemei sunt perechile (-14, -3) și $(14,3)$	1p

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ –
10.02.2024

CLASA a IX -a

SOLUȚII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.

1. a) Calculați suma $S = [\sqrt{1 \cdot 2}] + [\sqrt{2 \cdot 3}] + [\sqrt{3 \cdot 4}] + \ldots + [\sqrt{n \cdot (n+1)}], n \in \mathbb{N}^*$.

b) Rezolvați în $\mathbb{R}^*$ ecuația $[x] + \left\{\frac{1}{x}\right\} = \{x\} + \left[\frac{1}{x}\right]$, unde $[x]$ și $\{x\}$ sunt partea întreagă, respectiv partea fracționară a numărului real x.

Soluție:

a) $k^2 < k(k+1) < (k+1)^2 \Rightarrow k < \sqrt{k(k+1)} < k+1 \Rightarrow \left[\sqrt{k(k+1)}\right] = k, \quad k = \overline{1,n}$.

$$S = 1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

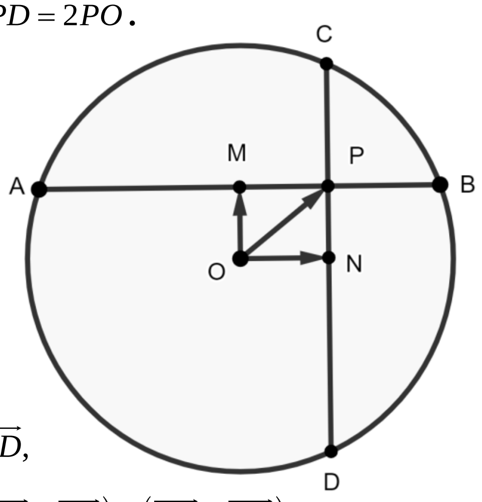
b) Ecuația din enunț $[x] + \left\{\frac{1}{x}\right\} = \{x\} + \left[\frac{1}{x}\right]$ este echivalentă cu $[x] - \left[\frac{1}{x}\right] = \{x\} - \left\{\frac{1}{x}\right\}$

$[x] - \left[\frac{1}{x}\right] \in \mathbb{Z}, \{x\} - \left\{\frac{1}{x}\right\} \in (-1,1) \Rightarrow [x] - \left[\frac{1}{x}\right] = 0, \{x\} - \left\{\frac{1}{x}\right\} = 0 \Rightarrow [x] = \left[\frac{1}{x}\right], \ \{x\} = \left\{\frac{1}{x}\right\}$

Deci $x = [x] + \{x\} = \left[\frac{1}{x}\right] + \left\{\frac{1}{x}\right\} = \frac{1}{x}$, de unde $x = \frac{1}{x} \Rightarrow x = 1, \ x = -1$, care verifică ecuația.

Detalii de rezolvare	Barem asociat
a) $k^2 < k(k+1) < (k+1)^2 \Rightarrow k < \sqrt{k(k+1)} < k+1 \Rightarrow \left[\sqrt{k(k+1)}\right] = k, \quad k = \overline{1,n}$	2p
$S = 1+2+3+...+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$	1p
b) $[x]-\left[\dfrac{1}{x}\right] = \{x\}-\left\{\dfrac{1}{x}\right\}$, $[x]-\left[\frac{1}{x}\right] \in \mathbb{Z}$, $\{x\}-\left\{\frac{1}{x}\right\} \in (-1,1)$	1p
$[x]-\left[\dfrac{1}{x}\right]=0,\ \{x\}-\left\{\dfrac{1}{x}\right\}=0 \Rightarrow [x]=\left[\dfrac{1}{x}\right],\ \{x\}=\left\{\dfrac{1}{x}\right\} \Rightarrow x=\dfrac{1}{x}$	2p
$x=\dfrac{1}{x} \Rightarrow x=1,\ x=-1$, care verifică ecuația	1p

2. Coardele $[AB]$ și $[CD]$ ale cercului $\mathcal{C}(O,r)$ sunt perpendiculare și se intersectează în punctul P. Să se demonstreze relația: $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=2\overrightarrow{PO}$.



Soluție:

Fie M mijlocul coardei $[AB]$ și N mijlocul coardei $[CD]$.

Rezultă că $OM \perp AB$, $ON \perp CD$, iar OMPN dreptunghi.

Din regula paralelogramului, $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}$.

Din regula triunghiului,

$\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OC},\ \overrightarrow{PD}=\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OD},$

de unde, prin însumare obținem $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=4\overrightarrow{PO}+\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)+\left(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$.

Cum $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{ON}$, avem

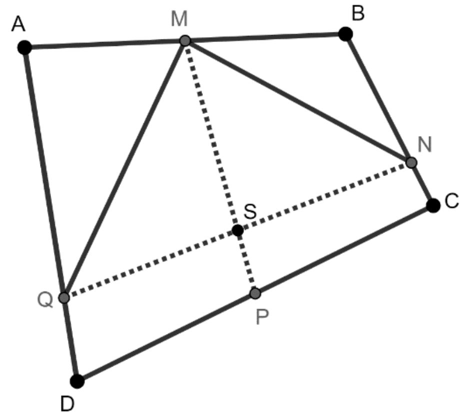
$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=4\overrightarrow{PO}+2\overrightarrow{OM}+2\overrightarrow{ON}=4\overrightarrow{PO}+2\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}\right)$

$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=4\overrightarrow{PO}+2\overrightarrow{OP}=2\overrightarrow{PO}$.

Detalii de rezolvare	**Barem asociat**
$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}$	1p
$\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OC},\ \overrightarrow{PD}=\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OD},$ $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=4\overrightarrow{PO}+\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)+\left(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$	3p
$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{ON}$	1p
$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=4\overrightarrow{PO}+2\overrightarrow{OP}=2\overrightarrow{PO}$.	2p

3. Fie ABCD un patrulater și punctele M, N, P, Q astfel încât

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB},\ \overrightarrow{BN}=3\overrightarrow{NC},\ \overrightarrow{DP}=\overrightarrow{PC},\ \overrightarrow{DQ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DA}.$



a) Demonstrați că $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MQ}=\frac{3}{4}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right)$.

b) Arătați că dreapta MP trece prin mijlocul segmentului NQ.

Soluție:

a) Din $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$ rezultă că M este mijlocul [AB]. Analog, P este mijlocul [DC].

$$\overrightarrow{BN}=3\overrightarrow{NC}\Rightarrow\overrightarrow{BN}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC},\quad \overrightarrow{DQ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DA}\Rightarrow\overrightarrow{AQ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}.$$

$$\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MQ}=\cancel{\overrightarrow{BM}}+\overrightarrow{BN}+\cancel{\overrightarrow{MA}}+\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{AQ}=\frac{3}{4}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}\right).$$

b) Fie S mijlocul [NQ] $\Rightarrow\overrightarrow{MS}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MQ}\right)=\frac{3}{8}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}\right)(1)$

$$2\overrightarrow{MP}=\left(\cancel{\overrightarrow{MA}}+\overrightarrow{AD}+\cancel{\overrightarrow{DP}}\right)+\left(\cancel{\overrightarrow{MB}}+\overrightarrow{BC}+\cancel{\overrightarrow{CP}}\right)\Rightarrow\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right)(2)$$

Din (1) și (2) $\Rightarrow\overrightarrow{MP}=\frac{4}{3}\overrightarrow{MS}$, rezultă că punctele M, S, P sunt coliniare, deci dreapta MP trece prin mijlocul [NQ].

Detalii de rezolvare	**Barem asociat**
a) M este mijlocul [AB], P este mijlocul [DC].	1p
$\overrightarrow{BN}=3\overrightarrow{NC}\Rightarrow\overrightarrow{BN}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$ **si** $\overrightarrow{DQ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DA}\Rightarrow\overrightarrow{AQ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$	1p
$\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MQ}=\cancel{\overrightarrow{BM}}+\overrightarrow{BN}+\cancel{\overrightarrow{MA}}+\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{AQ}=\frac{3}{4}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}\right)$	2p
b) S mijlocul [NQ] $\Rightarrow\overrightarrow{MS}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MQ}\right)=\frac{3}{8}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}\right)$	1p
$2\overrightarrow{MP}=\left(\cancel{\overrightarrow{MA}}+\overrightarrow{AD}+\cancel{\overrightarrow{DP}}\right)+\left(\cancel{\overrightarrow{MB}}+\overrightarrow{BC}+\cancel{\overrightarrow{CP}}\right)\Rightarrow\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right)$	1p
$\overrightarrow{MP}=\frac{4}{3}\overrightarrow{MS}\Rightarrow$ M, S, P sunt coliniare $\Rightarrow$ dreapta MP trece prin mijlocul [NQ].	1p

4. a) Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Arătați că $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}>\frac{n-1}{n+2}$

b) Fie $x \in (0,1)$. Arătați că $x - x^3 < \frac{1}{2}$

Soluție: **a)**

$P(n): \frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}>\frac{n-1}{n+2},\ \forall n \geq 2$

$P(2): \frac{1}{3}>\frac{1}{4}$ adevărat

presupunem $P(k): \frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2k-1}>\frac{k-1}{k+2}$, adevărată, $\forall k \geq 2$

$P(k+1): \frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2k-1}+\frac{1}{2k+1}>\frac{k}{k+3}$

dar, $ms > \frac{k-1}{k+2}+\frac{1}{2k+1}>\frac{k}{k+3}$ (de demonstrat)

adică $\frac{2k^2+1}{(k+2)(2k+1)}>\frac{k}{k+3} \Leftrightarrow \cancel{2k^3}+6k^2+k+3>\cancel{2k^3}+5k^2+2k \Leftrightarrow k^2-k+3>0$

dar $k \geq 2 \Rightarrow k^2 > k \Leftrightarrow k^2-k+3>0$ adevărată, $\forall k \geq 2$

Deci $P(k) \to P(k+1),\ \forall k \geq 2$

Atunci $P(n)$ adevărată, $\forall n \geq 2$

b) $x \in (0,1), m_g \leq m_a \Leftrightarrow \sqrt{x(1-x^2)} \leq \frac{x+1-x^2}{2} \Leftrightarrow x - x^3 \leq \frac{(x+1-x^2)^2}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{(x+1-x^2)^2}{4} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow (x+1-x^2)^2 < 2$

$dar\ \ x \in (0,1) \Rightarrow 0 < -x^2+x+1 = -(x^2-x)+1 = -\left(x^2-2x\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}+1 =$

$= \frac{5}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{5}{4} \Rightarrow (x+1-x^2)^2 \leq \frac{25}{16} < 2$

Strada Corneliu Coposu nr.26, Telefon: 0257 / 28 00 08, Fax 0257 / 21 47 46,
web : www.isjarad.ro e-mail: inf_arad@isjarad.ro

Detalii de rezolvare	**Barem asociat**
a) $P(n): \frac{1}{3}+\frac{1}{5}+...+\frac{1}{2n-1}>\frac{n-1}{n+2}, \forall n\geq 2$ $P(2): \frac{1}{3}>\frac{1}{4}$ adevărat	1p
presupunem $P(k): \frac{1}{3}+\frac{1}{5}+...+\frac{1}{2k-1}>\frac{k-1}{k+2}$, adevărată, $\forall k\geq 2$ $P(k+1): \frac{1}{3}+\frac{1}{5}+...+\frac{1}{2k-1}+\frac{1}{2k+1}>\frac{k}{k+3}$	1p
$\frac{k-1}{k+2}+\frac{1}{2k+1}>\frac{k}{k+3}$ (de demonstrat) $\frac{2k^2+1}{(k+2)(2k+1)}>\frac{k}{k+3} \Leftrightarrow \cancel{2k^3}+6k^2+k+3>\cancel{2k^3}+5k^2+2k \Leftrightarrow k^2-k+3>0$ $k\geq 2 \Rightarrow k^2>k \Leftrightarrow k^2-k+3>0$ adevărată, $\forall k\geq 2$	2p
b) $m_g\leq m_a \Leftrightarrow \sqrt{x(1-x^2)}\leq\frac{x+1-x^2}{2} \Leftrightarrow x-x^3\leq\frac{(x+1-x^2)^2}{4} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{(x+1-x^2)^2}{4}<\frac{1}{2} \Leftrightarrow (x+1-x^2)^2<2$	2p
$0<-x^2+x+1=-(x^2-x)+1=-\left(x^2-2x\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}+1=\frac{5}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\leq\frac{5}{4}$ $\Rightarrow (x+1-x^2)^2\leq\frac{25}{16}<2$	1p

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ –
10.02.2024

CLASA a X -a

SOLUȚII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.

1. Demonstrați că $\sqrt[3]{7-a\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7+a\sqrt{2}}=2$ dacă și numai dacă $a\in\{-5,5\}$.

Soluție:

„$\Rightarrow$”

Ridicăm la puterea a treia egalitatea $\sqrt[3]{7-a\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7+a\sqrt{2}}=2$ și obținem

$14+3\sqrt[3]{49-2a^2}\left(\sqrt[3]{7-a\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7+a\sqrt{2}}\right)=8\Leftrightarrow 14+6\sqrt[3]{49-2a^2}=8$.

Avem $6\sqrt[3]{49-2a^2}=-6$, de unde $a\in\{-5,5\}$.

„$\Leftarrow$”

Dacă $a\in\{-5,5\}$ notăm $x=\sqrt[3]{7-a\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7+a\sqrt{2}}$. Ridicăm la puterea a treia egalitatea și obținem $x^3=14-3x\Leftrightarrow x^3+3x-14=0\Leftrightarrow (x-2)(x^2+2x+7)=0$.

Cum ecuația $x^2+2x+7=0$ nu are soluții reale, obținem $x=2$, deci $\sqrt[3]{7-a\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7+a\sqrt{2}}=2$.

Detalii de rezolvare	Barem asociat
Ridică corect la puterea a treia egalitatea din enunț și obține $14+6\sqrt[3]{49-2a^2}=8$	1p
Rezolvă ecuația și obține $a\in\{-5,5\}$	2p
Dacă $a\in\{-5,5\}$ notează $x=\sqrt[3]{7-a\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7+a\sqrt{2}}$	1p
Ridică la puterea a treia și obține ecuația $x^3+3x-14=0$	1p
Rezolvă ecuația și arată că $x=2$ este soluție unică	2p

2. Să se demonstreze inegalitățile:

a) $\log_x\left(\frac{2xy}{x+y}\right)+\log_y\left(\frac{2xy}{x+y}\right)\geq 2,\ x,y\in(0,1)$.

b) $\frac{\log_x y}{x+y}+\frac{\log_y z}{y+z}+\frac{\log_z x}{z+x}\geq\frac{9}{2(x+y+z)}$, unde $x,y,z\in(0,1)$ sau $x,y,z\in(1,\infty)$.

Soluție:

a) Folosind inegalitatea mediilor avem $\frac{2xy}{x+y}\leq\sqrt{xy}$. Cum $x,y\in(0,1)$ avem că $\log_x\left(\frac{2xy}{x+y}\right)\geq\log_x\left(\sqrt{xy}\right)$ și $\log_y\left(\frac{2xy}{x+y}\right)\geq\log_y\left(\sqrt{xy}\right)$. Adunând cele două relații obținem

$$\log_x\left(\frac{2xy}{x+y}\right)+\log_y\left(\frac{2xy}{x+y}\right)\geq\log_x\left(\sqrt{xy}\right)+\log_y\left(\sqrt{xy}\right)=\frac{1}{2}\left(2+\log_x y+\log_y x\right).$$

Cum $x,y\in(0,1)$, $\log_x y>0$ și $\log_y x>0$. Aplicând inegalitatea mediilor pentru $\log_x y$ și $\log_y x$ avem $\log_x y+\log_y x\geq 2\sqrt{\log_x y\cdot\log_y x}=2$.

Deci $\log_x\left(\frac{2xy}{x+y}\right)+\log_y\left(\frac{2xy}{x+y}\right)\geq\frac{1}{2}(2+2)=2$, pentru orice $x,y\in(0,1)$.

b) Dacă $x,y,z\in(0,1)$ sau $x,y,z\in(1,\infty)$ atunci $\log_x y>0$, $\log_y z>0$ și $\log_z x>0$. Aplicăm inegalitatea mediilor pentru $\frac{\log_x y}{x+y}$, $\frac{\log_y z}{y+z}$ și $\frac{\log_z x}{z+x}$ și obținem

$$\frac{\log_x y}{x+y}+\frac{\log_y z}{y+z}+\frac{\log_z x}{z+x}\geq 3\sqrt[3]{\frac{\log_x y}{x+y}\cdot\frac{\log_y z}{y+z}\cdot\frac{\log_z x}{z+x}}.$$

Dar $\log_x y\cdot\log_y z\cdot\log_z x=1$, deci $\frac{\log_x y}{x+y}+\frac{\log_y z}{y+z}+\frac{\log_z x}{z+x}\geq 3\frac{1}{\sqrt[3]{(x+y)\cdot(y+z)\cdot(z+x)}}$.

Aplicând inegalitatea mediilor pentru $x+y$, $y+z$ și $z+x$, avem

$\sqrt[3]{(x+y)\cdot(y+z)\cdot(z+x)}\leq\frac{2(x+y+z)}{3}$, de unde obținem

$$\frac{\log_x y}{x+y}+\frac{\log_y z}{y+z}+\frac{\log_z x}{z+x}\geq\frac{9}{2(x+y+z)}$$

Detalii de rezolvare	Barem asociat
a) Aplică inegaliatea mediilor $\frac{2xy}{x+y} \le \sqrt{xy}$	1p
Arată că $\log_x\left(\frac{2xy}{x+y}\right)+\log_y\left(\frac{2xy}{x+y}\right) \ge \frac{1}{2}\left(2+\log_x y+\log_y x\right)$	1p
Aplică inegalitatea mediilor pentru $\log_x y$ și $\log_y x$ și finalizează	1p
b) Arată că $\frac{\log_x y}{x+y}+\frac{\log_y z}{y+z}+\frac{\log_z x}{z+x} \ge 3\sqrt[3]{\frac{\log_x y}{x+y}\cdot\frac{\log_y z}{y+z}\cdot\frac{\log_z x}{z+x}}$	1p
Arată că $\frac{\log_x y}{x+y}+\frac{\log_y z}{y+z}+\frac{\log_z x}{z+x} \ge 3\frac{1}{\sqrt[3]{(x+y)\cdot(y+z)\cdot(z+x)}}$	1p
Arată că $\sqrt[3]{(x+y)\cdot(y+z)\cdot(z+x)} \le \frac{2(x+y+z)}{3}$	1p
Finalizează	1p

3. Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ cu $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ şi $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1} = 1$. Determinaţi valoarea maximă a expresiei $E = \left|\frac{z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_3} + \frac{3z_3}{z_1}\right|$.

Soluție:

Cum $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ cu $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ avem că $\overline{z_i} = \frac{1}{z_i}, i = \overline{1,3}$, Conjugând relația $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1} = 1$ obținem $\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} + \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_3}} + \frac{\overline{z_3}}{\overline{z_1}} = 1$, de unde $\frac{z_2}{z_1} + \frac{z_3}{z_2} + \frac{z_1}{z_3} = 1$. Prin urmare

$$\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1} = \frac{z_2}{z_1} + \frac{z_3}{z_2} + \frac{z_1}{z_3} \Leftrightarrow z_1^2 z_3 + z_2^2 z_1 + z_3^2 z_2 = z_2^2 z_3 + z_3^2 z_1 + z_1^2 z_2$$

$$\Leftrightarrow z_1^2 z_3 + z_2^2 z_1 + z_3^2 z_2 - z_2^2 z_3 - z_3^2 z_1 - z_1^2 z_2 = 0 \Leftrightarrow z_1^2 (z_3 - z_2) - z_1 (z_3^2 - z_2^2) + z_2 z_3 (z_3 - z_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (z_3 - z_2)(z_1 - z_2)(z_1 - z_3) = 0$$

I. Dacă $z_3 - z_2 = 0 \Rightarrow z_3 = z_2$, atunci $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1} = 1$ devine $z_1^2 + z_2^2 = 0$, deci $z_2 = iz_1$ sau $z_2 = -iz_1$.

Dacă $z_2 = iz_1$ atunci $E = \left|\frac{1}{i} + 2 + 3i\right| = \sqrt{8}$.

Dacă $z_2 = -iz_1$ atunci $E = \left|-\frac{1}{i} + 2 - 3i\right| = \sqrt{8}$.

II. Dacă $z_1 - z_2 = 0 \Rightarrow z_1 = z_2$, atunci $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1} = 1$ devine $z_3^2 + z_2^2 = 0$, deci $z_3 = iz_2$ sau $z_3 = -iz_2$.

Dacă $z_3 = iz_2$ atunci $E = \left|1 + \frac{2}{i} + 3i\right| = \sqrt{2}$.

Dacă $z_3 = -iz_2$ atunci $E = \left|1 - 2\frac{1}{i} - 3i\right| = \sqrt{2}$.

III. Dacă $z_1 - z_3 = 0 \Rightarrow z_1 = z_3$, atunci $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1} = 1$ devine $z_1^2 + z_2^2 = 0$, deci $z_2 = iz_1$ sau $z_2 = -iz_1$.

Dacă $z_2 = iz_1$ atunci $E = \left|\frac{1}{i} + 2i + 3\right| = \sqrt{10}$.

Dacă $z_3 = -iz_2$ atunci $E = \left|-\frac{1}{i} - 2i + 3\right| = \sqrt{10}$

Prin urmare, valoarea maximă a lui E este $\sqrt{10}$.

Detalii de rezolvare	**Barem asociat**
Arată că $z_i = \frac{1}{\overline{z_i}}, i = \overline{1,3}$	1p
Arată că $z_1^2 z_3 + z_2^2 z_1 + z_3^2 z_2 = z_2^2 z_3 + z_3^2 z_1 + z_1^2 z_2$	1p
Arată că $(z_3 - z_2)(z_1 - z_2)(z_1 - z_3) = 0$	1p
Studiază cazul $z_3 - z_2 = 0$ și găsește $E = \sqrt{8}$	1p
Studiază cazul $z_1 - z_2 = 0$ și găsește $E = \sqrt{2}$	1p
Studiază cazul $z_1 - z_3 = 0$ și găsește $E = \sqrt{10}$	1p
Finalizează	1p

4. Determinați funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$f\left(x+f\left((1+x)y\right)\right)=(1+y)f(x)+1$$

pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$.

Soluție:

Luăm $x=0$ în relația din enunț și obținem $f\left(f(y)\right)=(1+y)f(0)+1$ pentru orice $y\in\mathbb{R}$.

Dacă $f(0)=0$ atunci relația de mai sus devine $f\left(f(y)\right)=1$, pentru orice $y\in\mathbb{R}$. Atunci pentru $y=0$ avem $1=f\left(f(0)\right)=f(0)=0$, contradicție. Prin urmare $f(0)\neq 0$.

Demonstrăm acum că funcția f este injectivă. Fie $y_1,y_2\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(y_1)=f(y_2)$. Cum $f\left(f(y_1)\right)=(1+y_1)f(0)+1$ și $f\left(f(y_2)\right)=(1+y_2)f(0)+1$ avem că $(1+y_1)f(0)=(1+y_2)f(0)$, deci $(y_1-y_2)f(0)=0$.

Cum $f(0)\neq 0\Rightarrow y_1=y_2$ și prin urmare f este o funcție injectivă.

Luăm $x=-1$ în identitatea din enunț și obținem $f\left(-1+f(0)\right)=(1+y)f(-1)+1$, pentru orice $y\in\mathbb{R}$, deci $f(-1)=0$.

Cum f este o injectivă avem $f(x)\neq 0$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Luăm $y=-\dfrac{1}{f(x)}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ în identitatea din enunț. Obținem

$$f\left(x+f\left(-\frac{1+x}{f(x)}\right)\right)=\left(1-\frac{1}{f(x)}\right)f(x)+1\Rightarrow f\left(x+f\left(-\frac{1+x}{f(x)}\right)\right)=f(x).$$

Cum f este o injectivă avem $x+f\left(-\dfrac{1+x}{f(x)}\right)=x\Rightarrow f\left(-\dfrac{1+x}{f(x)}\right)=0$.

Dar $f(-1)=0$ și f este o injectivă, deci $-\dfrac{1+x}{f(x)}=-1\Rightarrow f(x)=1+x$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Cum $f(-1)=0$ avem $f(x)=1+x$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

Se verifică prin calcul direct că funcția f găsită satisface identitatea din enunț.

Detalii de rezolvare	**Barem asociat**
Pune $x=0$ în relația din enunț și obține $f\left(f\left(y\right)\right)=\left(1+y\right)f\left(0\right)+1$ pentru orice $y\in\mathbb{R}$.	1p
Demonstrează că $f\left(0\right)\neq 0$	1p
Demonstrează că funcția *f* este injectivă	1p
Arată că $f\left(-1\right)=0$.	1p
Consider $y=-\dfrac{1}{f\left(x\right)}$ în relația din enunț și obține $f\left(-\dfrac{1+x}{f\left(x\right)}\right)=0$	1p
Demonstrează că $f(x)=1+x$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.	1p
Verifică că funcția găsită satisface identitatea din enunț	1p

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ –
10.02.2024

CLASA a XI -a

SOLUȚII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.

1. Fie matricele $A, B \in M_n(\mathbb{C})$cu $A^3 = A^2$și $A + B = I_n$. Să se arate că matricea $I_n + AB$ este inversabilă.

Soluție:

Prin înmulțirea la stânga cu matricea A, egalitatea $A + B = I_n$ devine $A^2 + AB = A$

$\Rightarrow AB = A - A^2$.

Ridicând la pătrat această egalitate obținem: $(AB)^2 = (A - A^2)^2 = A^2 - 2A^3 + A^4$. (1)

Dar $A^3 = A^2 \Rightarrow A^4 = A^3$ (2)

Din relațiile (1) și (2) rezultă că $(AB)^2 = O_n$.

Ca urmare, $I_n = I_n - (AB)^2 = (I_n - AB)(I_n + AB)$.

Rezultă că matricea $I_n + AB$ este inversabilă și inversa ei este $I_n - AB$.

Detalii de rezolvare	Barem asociat
$A \cdot \vert A + B = I_n \Rightarrow A^2 + AB = A \Rightarrow AB = A - A^2$	2p
$\left.\begin{matrix}(AB)^2 = (A - A^2)^2 = A^2 - 2A^3 + A^4 \\ A^3 = A^2 \Rightarrow A^4 = A^3\end{matrix}\right\} \Rightarrow (AB)^2 = O_n$	2p
$I_n = I_n - (AB)^2 = (I_n - AB)(I_n + AB)$	2p
matricea $I_n + AB$ este inversabilă și inversa ei este $I_n - AB$	1p

2. Fie A∈ $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Arătați că $det(A+I_2) = det(A - I_2)$ dacă și numai dacă Tr(A)=0 .

Soluție:

Fie A=$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ și I_2=$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Atunci $det(A+I_2) = \begin{vmatrix} a+1 & b \\ c & d+1 \end{vmatrix}$ și $det(A - I_2) = \begin{vmatrix} a-1 & b \\ c & d-1 \end{vmatrix}$

Relația din ipoteză se scrie $\begin{vmatrix} a+1 & b \\ c & d+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-1 & b \\ c & d-1 \end{vmatrix}$

Egalitatea este echivalentă cu $(a+1)(d+1) - bc = (a-1)(d-1) - bc$, deci

$(a+1)(d+1) = (a-1)(d-1)$, ceea ce înseamnă că

$ad + a + d + 1 = ad - a - d + 1$

Relația anterioară este echivalentă cu $a + d = -a - d = -(a + d)$

Ceea ce se scrie $a + d = 0$

Deoarece Tr(A) = $a + d$ se obține că Tr(A) = 0

Detalii de rezolvare	**Barem asociat**
$\begin{vmatrix} a+1 & b \\ c & d+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-1 & b \\ c & d-1 \end{vmatrix}$	2p
$(a+1)(d+1) - bc = (a-1)(d-1) - bc$	2p
$a + d = -a - d$	2p
Tr(A) = $a + d$, rezultă că Tr(A) = 0	1p

3. Să se calculeze : $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt[3]{x-5}+\sqrt{x-3}}{\sqrt{5-x}+\sqrt[3]{3-x}}$

Soluție:

Notăm cu $L=\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt[3]{x-5}+\sqrt{x-3}}{\sqrt{5-x}+\sqrt[3]{3-x}}$

Dacă $x\to 4$, atunci $x-4\to 0$ și $y=x-4\to 0$

Astfel, limita inițială limita se scrie L= $\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sqrt[3]{y-1}+\sqrt{y+1}}{\sqrt{1-y}+\sqrt[3]{-1-y}}$

$$\Rightarrow L=\lim_{y\to 0}\frac{-(1-y)^{\frac{1}{3}}+(1+y)^{\frac{1}{2}}}{(1-y)^{\frac{1}{2}}-(1+y)^{\frac{1}{3}}}=\lim_{y\to 0}\frac{\frac{(1+y)^{\frac{1}{2}}-(1-y)^{\frac{1}{3}}}{y}}{\frac{(1-y)^{\frac{1}{2}}-(1+y)^{\frac{1}{3}}}{y}}=\lim_{y\to 0}\frac{\frac{(1+y)^{\frac{1}{2}}-(1-y)^{\frac{1}{3}}+1-1}{y}}{\frac{(1-y)^{\frac{1}{2}}-(1+y)^{\frac{1}{3}}+1-1}{y}}=$$

$$\lim_{y\to 0}\frac{\frac{(1+y)^{\frac{1}{2}}-1}{y}-\frac{(1-y)^{\frac{1}{3}}-1}{y}}{-\frac{(1-y)^{\frac{1}{2}}-1}{-y}-\frac{(1+y)^{\frac{1}{3}}-1}{y}}=\lim_{y\to 0}\frac{\frac{(1+y)^{\frac{1}{2}}-1}{y}+\frac{(1-y)^{\frac{1}{3}}-1}{-y}}{-\frac{(1-y)^{\frac{1}{2}}-1}{-y}-\frac{(1+y)^{\frac{1}{3}}-1}{y}}=\frac{\lim\limits_{y\to 0}\frac{(1+y)^{\frac{1}{2}}-1}{y}+\lim\limits_{y\to 0}\frac{(1-y)^{\frac{1}{3}}-1}{-y}}{-\lim\limits_{y\to 0}\frac{(1-y)^{\frac{1}{2}}-1}{-y}-\lim\limits_{y\to 0}\frac{(1+y)^{\frac{1}{3}}-1}{y}}.$$

Prin aplicarea regulii lui l'Hospital se obține:

$$L=\frac{\lim\limits_{y\to 0}\frac{\frac{1}{2}(1+y)^{-\frac{1}{2}}}{1}+\lim\limits_{y\to 0}\frac{-\frac{1}{3}(1-y)^{-\frac{2}{3}}}{-1}}{-\lim\limits_{y\to 0}\frac{-\frac{1}{2}(1-y)^{-\frac{1}{2}}}{-1}-\lim\limits_{y\to 0}\frac{\frac{1}{3}(1+y)^{-\frac{2}{3}}}{1}}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}=-1$$

Detalii de rezolvare	**Barem asociat**
$x-4=y\to 0$ limita se scrie L= $\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sqrt[3]{y-1}+\sqrt{y+1}}{\sqrt{1-y}+\sqrt[3]{-1-y}}$	2p
L=$\lim\limits_{y\to 0}\frac{-(1-y)^{\frac{1}{3}}+(1+y)^{\frac{1}{2}}}{(1-y)^{\frac{1}{2}}-(1+y)^{\frac{1}{3}}}$	2p
L=$\lim\limits_{y\to 0}\frac{\frac{(1+y)^{\frac{1}{2}}-1}{y}+\frac{(1-y)^{\frac{1}{3}}-1}{-y}}{-\frac{(1-y)^{\frac{1}{2}}-1}{-y}-\frac{(1+y)^{\frac{1}{3}}-1}{y}}$	2p
Finalizare L= $\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}=-1$	1p

4. Arătați că șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit recurent prin $x_1 = a > 1$ și $x_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2x_n + \frac{1}{x_n^2}\right)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ este convergent la 1.

Soluție:

Din $x_1 = a > 1$, obținem $x_2 - 1 = \frac{1}{3}(2a + \frac{1}{a^2}) - 1 = \frac{2a^3-3a^2+1}{3a^2} = \frac{(a-1)^2(2a+1)}{3a^2} > 0$

Presupunem $x_n > 1$. Rezultă în mod analog că

$x_{n+1} - 1 = \frac{(x_n-1)^2(2x_n+1)}{3x_n^2} > 0$

$\Longrightarrow x_{n+1} > 1 \Longrightarrow x_n > 1$, deci (x_n) este mărginit inferior de 1.

$x_{n+1} - x_n = \frac{2x_n^3+1}{3x_n^2} - x_n = \frac{2x_n^3+1-3x_n^3}{3x_n^2} = \frac{1-x_n^3}{3x_n^2} < 0$ deci șirul (x_n) este strict descrescător.

Atunci șirul este convergent, deci există $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l \geq 1$

Trecând la limită în relația de recurență se obține $l = \frac{2l^3+1}{3l^2}$ adică $3l^3 = 2l^3 + 1$.

Ca urmare, $l = 1$.

Detalii de rezolvare	**Barem asociat**
$x_2 - 1 = \dfrac{2a^3 - 3a^2 + 1}{3a^2} = \dfrac{(a-1)^2(2a+1)}{3a^2} > 0$	1p
$x_{n+1} - 1 = \frac{(x_n-1)^2(2x_n+1)}{3x_n^2} > 0 \Rightarrow (x_n)$ este mărginit inferior de 1	2p
$x_{n+1} - x_n = \frac{1-x_n^3}{3x_n^2} < 0$ deci șirul (x_n) este strict descrescător	2p
șirul este convergent, deci există $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l \geq 1$	1p
$l = \frac{2l^3+1}{3l^2}$, adică $l = 1$	1p

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ –
10.02.2024

CLASA a XII -a

SOLUȚII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.

1. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = x + y + xy$ și se notează $x_n = \underbrace{x * x * \ldots * x}_{n \text{ de } x}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Să se determine:

a) numerele reale x care sunt egale cu simetricele lor în raport cu legea „$*$ ”;
b) numerele reale y pentru care $y_6 = 63$;
c) numerele reale k pentru care mulțimea $M = [k, +\infty)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea „$*$ ”.

Soluție:

a) Elementul neutru al legii „$*$ ” este $e = 0$ și simetricul lui $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ este $x' = -\frac{x}{1+x}$. Din $x = x'$, se deduce $x \in \{0, -2\}$.

b) Avem că $x * y = (x + 1)(y + 1) - 1, \forall x, y \in \mathbb{R}$ și legea „$*$ ” este asociativă. Atunci $y_2 = y * y = (y + 1)^2 - 1$, de unde rezultă că $y_4 = y_2 * y_2 = (y + 1)^4 - 1$. Cum $y_6 = y_4 * y_2$, deducem că $y_6 = (y + 1)^6 - 1$. Din $(y + 1)^6 - 1 = 63$, rezultă că $y \in \{-3,1\}$.

c) Dacă $M = [k, +\infty)$ este parte stabilă, atunci $k * k \in M$, de unde se obține $k^2 + 2k \geq k$, adică $k \in (-\infty, -1] \cup [0, +\infty)$.

Pentru $k < -1$, luând $x = k \in M$ și $y = k^2 \in M$, se obține $x * y = k(k^2 + k + 1) < k$, de unde deducem că $x * y \notin M$.

Pentru $k = -1$, dacă $x, y \in [-1, +\infty)$, atunci $(x + 1)(y + 1) \geq 0$, deci $x * y \in M$.

Pentru $k \geq 0$, dacă $x, y \in M$, atunci $x, y \geq 0$ și $x * y = x + y + xy \geq x \geq k$, deci $x * y \in M$.

Concluzionăm că $k \in [0, +\infty) \cup \{-1\}$.

Detalii de rezolvare	**Barem asociat**
a) Află că elementul neutru al legii „* ” este $e=0$ și simetricul lui $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ este $x'=-\frac{x}{1+x}$.	1p
Rezolvă ecuația $x=x'$ și obține $x\in\{0,-2\}$.	1p
b) Arată că $y_6=(y+1)^6-1$	1p
Obține $y\in\{-3,1\}$.	1p
c) Pune condiția $k*k\in M$, de unde obține $k\in(-\infty,-1]\cup[0,+\infty)$.	1p
Arată că, pentru $k<-1$, M nu este parte stabilă.	1p
Arată că, pentru $k=-1$ și $k\geq 0, M$ este parte stabilă.	1p

2. Să se calculeze

$$\int \frac{x^3 \cdot e^x}{(x+3)^2} \mathrm{d}x.$$

Soluție:

Avem că $\int \frac{x^3 \cdot e^x}{(x+3)^2} \mathrm{d}x = \int (x^3 \cdot e^x) \cdot \left(\frac{-1}{x+3}\right)' dx$. Integrând succesiv prin părți, obținem că $\int \frac{x^3 \cdot e^x}{(x+3)^2} \mathrm{d}x = -\frac{x^3 \cdot e^x}{x+3} + \int (x^3 \cdot e^x)' \cdot \frac{1}{x+3} dx = -\frac{x^3 \cdot e^x}{x+3} + \int e^x \cdot x^2 (x+3) \cdot \frac{1}{x+3} dx = -\frac{x^3 \cdot e^x}{x+3} + \int (e^x)' \cdot x^2 dx = -\frac{x^3 \cdot e^x}{x+3} + e^x \cdot x^2 - 2\int e^x \cdot x dx = -\frac{x^3 \cdot e^x}{x+3} + e^x \cdot x^2 - 2(e^x \cdot x - e^x) + \mathcal{C} = e^x \cdot \left(-\frac{x^3}{x+3} + x^2 - 2x + 2\right) + \mathcal{C} = e^x \cdot \frac{x^2 - 4x + 6}{x+3} + \mathcal{C}.$

Detalii de rezolvare	Barem asociat
Observă că $\int \frac{x^3 \cdot e^x}{(x+3)^2} \mathrm{d}x = \int (x^3 \cdot e^x) \cdot \left(\frac{-1}{x+3}\right)' dx.$	2p
Integrează prin părți și obține că $\int \frac{x^3 \cdot e^x}{(x+3)^2} \mathrm{d}x = -\frac{x^3 \cdot e^x}{x+3} + \int e^x \cdot x^2 dx.$	2p
Integrează prin părți și obține că $\int e^x \cdot x^2 dx = e^x (x^2 - 2x + 2) + \mathcal{C}.$	2p
Obține că $\int \frac{x^3 \cdot e^x}{(x+3)^2} \mathrm{d}x = e^x \cdot \frac{x^2 - 4x + 6}{x+3} + \mathcal{C}.$	1p

3. Se consideră grupul $(G,\cdot)$ cu elementul neutru e.

a) Demonstrați că $(aba^{-1})^n = ab^n a^{-1}, \forall a, b \in G$ și $n \in \mathbb{N}^*$;

b) Demonstrați că dacă există $a, b \in G$ astfel încât $ababa = babab$, atunci $a^{2024} = e$, dacă și numai dacă $b^{2024} = e$.

Soluție:

a) Demonstrăm prin inducție matematică. Fie $P(n): (aba^{-1})^n = ab^n a^{-1}, n \in \mathbb{N}^*$.
$P(1): aba^{-1} = aba^{-1}$ (adevărată).
$P(k) \rightarrow P(k+1), \forall\, k \in \mathbb{N}^*$. Presupunem $P(k)$ adevarată, de unde rezultă că $(aba^{-1})^{k+1} = (aba^{-1})^k \cdot (aba^{-1}) = ab^k a^{-1} aba^{-1} = ab^{k+1} a^{-1}$, deci $P(k+1)$ este adevărată, de unde concluzia că $(aba^{-1})^n = ab^n a^{-1}, \forall a, b \in G$ și $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Dacă $ababa = babab$, atunci $(ab)^2 a = (ba)^2 b$. Înmulțind la stânga și la dreapta cu $(ab)^{-1}$, obținem $(ab)a(ab)^{-1} = (ab)^{-1} b(ab)$. Conform subpunctului a), avem că $(ab)a^{2024}(ab)^{-1} = (ab)^{-1} b^{2024}(ab)$. Dacă $a^{2024} = e$, atunci $(ab)^{-1} b^{2024}(ab) = e$, iar înmulțind la stânga și la dreapta cu (ab), respectiv $(ab)^{-1}$, obținem că $b^{2024} = e$. Analog, dacă $b^{2024} = e$, atunci $a^{2024} = e$.

Detalii de rezolvare	**Barem asociat**
a) Demonstrează prin inducție matematică $P(n): (aba^{-1})^n = ab^n a^{-1}, n \in \mathbb{N}^*$.	3p
b)Deduce că dacă $ababa = babab$, atunci $(ab)^2 a = (ba)^2 b$, deci $(ab)a(ab)^{-1} = (ab)^{-1} b(ab)$.	1p
Deduce, folosind subpunctul a), că $(ab)a^{2024}(ab)^{-1} = (ab)^{-1} b^{2024}(ab)$.	1p
Argumentează că dacă $a^{2024} = e$, atunci $(ab)^{-1} b^{2024}(ab) = e$, deci $b^{2024} = e$.	1p
Argumentează că dacă $b^{2024} = e$, atunci $(ab)a^{2024}(ab)^{-1} = e$, deci $a^{2024} = e$.	1p

4.

a) Să se arate că funcțiile $F, G: (0, +\infty) \to \mathbb{R}, F(x) = arctg\ x$ și $G(x) = -arctg\ \frac{1}{x}$ sunt primitive ale aceleași funcții;

b) Să se calculeze

$$\int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{(x \ln x)^{2023}}{(x^2 + x + 1)^{2024}} \cdot \cos(2024 arctg\ x) \mathrm{d}x, \text{unde } n \in \mathbb{N}^*.$$

Soluție:

a) Avem că $F'(x) = G'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \forall x \in (0, +\infty)$, de unde concluzia.

b) Din subpunctul a), cum două primitive ale aceleași funcții diferă printr-o constantă, rezultă că $arctg\ x + arctg\ \frac{1}{x} = c, \forall x \in (0, +\infty)$. Pentru $x = 1$, deducem că $c = 2arctg\ 1 = \frac{\pi}{2}$, de unde rezultă că $arctg\ \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - arctg\ x, \forall x \in (0, +\infty)$. Efectuând în integrală schimbarea de variabilă $y = \frac{1}{x}, dx = -\frac{1}{y^2} dy$, obținem

$$I = \int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{(x \ln x)^{2023}}{(x^2 + x + 1)^{2024}} \cdot \cos(2024 arctg\ x) \mathrm{d}x =$$

$$= \int_{n}^{\frac{1}{n}} \frac{\frac{1}{y^{2023}} \left(\ln \frac{1}{y}\right)^{2023}}{\left(\frac{1}{y^2} + \frac{1}{y} + 1\right)^{2024}} \cdot \cos\left[2024\left(\frac{\pi}{2} - arctg\ y\right)\right] \left(-\frac{1}{y^2}\right) \mathrm{d}y =$$

$$= -\int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{(\ln y)^{2023}}{y^{2023} \cdot \frac{1}{y^{4048}} \cdot (y^2 + y + 1)^{2024}} \cdot \frac{1}{y^2} \cdot \cos(1012\pi - 2024 arctg\ y)\, \mathrm{d}y =$$

$$= -\int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{(y \ln y)^{2023}}{(y^2 + y + 1)^{2024}} \cdot \cos(2024 arctg\ y) \mathrm{d}y = -I.$$

Cum $I = -I$, rezultă că $I = 0$.

Detalii de rezolvare	**Barem asociat**
a) $F'(x) = G'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \forall x \in (0,+\infty)$.	2p
b)Obține identitatea $arctg\ \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - arctg\ x, \forall x \in (0,+\infty)$.	1p
Efectuează schimbarea de variabilă $y = \frac{1}{x}, dx = -\frac{1}{y^2}dy$.	1p
Obține $\int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{(x\ln x)^{2023}}{(x^2+x+1)^{2024}} \cdot \cos(2024arctg\ x)\mathrm{d}x = \int_{n}^{\frac{1}{n}} \frac{\frac{1}{y^{2023}}\left(\ln\frac{1}{y}\right)^{2023}}{\left(\frac{1}{y^2}+\frac{1}{y}+1\right)^{2024}} \cdot$ $\cos\left[2024\left(\frac{\pi}{2} - arctg\ y\right)\right]\left(-\frac{1}{y^2}\right)\mathrm{d}y =$	1p
$= -\int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{(\ln y)^{2023}}{y^{2023} \cdot \frac{1}{y^{4048}} \cdot (y^2+y+1)^{2024}} \cdot \frac{1}{y^2} \cdot \cos(1012\pi - 2024arctg\ y)\,\mathrm{d}y =$	1p
$= -\int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{(y\ln y)^{2023}}{(y^2+y+1)^{2024}} \cdot \cos(2024arctg\ y)\mathrm{d}y$ și concluzia că valoarea integralei este 0.	1p