OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICA

ETAPA LOCALĂ

12.02.2024

CLASA a IX-a

SUBIECTUL I (7 puncte)

Dacă x,y,z sunt numere reale pozitive astfel încât x+y+z = 2024, atunci are loc inegalitatea: $\sqrt{2024x+yz}+\sqrt{2024y+xz}+\sqrt{2024z+xy} \leq 4048$

SUBIECTUL II (7 puncte)

Să se rezolve ecuația: $\left[\frac{n-1}{2}\right]+\left[\frac{n^2-n}{3}\right]=n$, $n \in \mathbb{Z}$, unde $[\,x\,]$ este partea întreagă a numărului x .

SUBIECTUL III (7 puncte)

Se consideră $(a_n)_{n\geq 1}$ progresia aritmetică de rație $r=4$ și $a_1=2$, iar $(b_n)_{n\geq 1}$ progresia geometrică de rație $q=2$ și $b_1=1$.

a) Arătați că $1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}$, pentru orice număr x real nenul. ***3p***

b) Calculați suma $S=\sum_{k=1}^{2024}\frac{a_k}{b_k}$. ***4p***

SUBIECTUL IV (7 puncte)

Se consideră triunghiul ABC și punctele $M \in (AB)$, $N \in (AC)$ și P mijlocul lui $[MN]$. Să se arate că dacă $\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CM}=2\overrightarrow{PA}$, atunci $\overrightarrow{BN}$ și $\overrightarrow{CM}$ sunt mediane.