OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
FAZA LOCALĂ
CLASA a XI-a

- *Nu se acordă puncte din oficiu.*
- *Fiecare exercițiu este punctat de la 0 la 7.*
- *Timp efectiv de lucru: 3 ore*

SUBIECTUL I (7 puncte)

Fie M (x, k) = $\begin{vmatrix} \sqrt[3]{x} & \sqrt[3]{k} & \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{k} \\ \sqrt[3]{k} & \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{k} & \sqrt[3]{x} \\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{k} & \sqrt[3]{x} & \sqrt[3]{k} \end{vmatrix}$**, cu x, k ∈ ℝ.**

a) Să se calculeze M (-k, k) si Ṁ ($\sin^2\alpha$, $\cos^2\alpha$), α ∈ ℝ. **5p**

b) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale inecuația $\sum_{k=1}^{4047} M(x,k) \geq 0$. **2p**

SUBIECTUL II (7 puncte)

Să se calculeze: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt[3]{n^3+n^2}\right)$

SUBIECTUL III (7 puncte)

Se consideră matricea $A=\frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$**. Să se determine** $A^n=\begin{pmatrix}x_n & y_n\\ -y_n & x_n\end{pmatrix}$**,** $n \in \mathbb{N}^*$ **și să se calculeze limitele șirurilor** $(x_n)_n$ **și** $(y_n)_n$**.**

SUBIECTUL IV (7 puncte)

Se consideră șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ **definit prin** $x_{n+1}=x_n+\frac{1}{e^{x_n}}$ **și cu** $x_0 \in \mathbb{R}$**. Arătați că** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{x_n}=1$**.**