OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
FAZA LOCALĂ 12.02.2024
CLASA a XII-a

SUBIECTUL I (7 puncte)

Pe mulțimea A = $[2,4]$ definim legea de compoziție asociativă $x \circ y = \frac{3xy-5x-5y+10}{2xy-4x-4y+9}$, x, y $\in [2,4]$ și funcția f: A→ $\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{5-2x}{x-1}$.

a) **Determinați elementele simetrizabile ale legii;** **2p**
b) **Arătați că Im $f = [-1,1]$ și că $f(x \circ y) = f(x) \cdot f(y)$, $(\forall) x, y \in A$;** **3p**
c) **Calculați $\frac{11}{5} \circ \frac{17}{8} \circ \frac{23}{11} \circ \dots \circ \frac{6n+5}{3n+2}$, unde n$\in N, n \geq 2$.** **2p**

SUBIECTUL II (7 puncte)

Fie (G, ·) un grup și f: G → G cu f (x) = x^2. Dacă f este morfism atunci, să se demonstreze că (G, ·) este grup abelian.

SUBIECTUL III (7 puncte)

Se consideră funcţia $f: \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\cos^2 x} \cdot e^x$. Dacă F este o primitivă a funcţiei f cu condiţia $F(0) = 1$, calculaţi $F\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

SUBIECTUL IV (7 puncte)

Se consideră funcţia $f: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ continuă şi descrescătoare, astfel încât $f(\pi) = 0$ şi fie F o primitivă a sa. Demonstraţi că: $\int_0^{2\pi} F(x) \cos x \, dx \leq 0$

- *Nu se acordă puncte din oficiu.*
- *Fiecare exercițiu este punctat de la 0 la 7.*
- *Timp efectiv de lucru: 3 ore*