



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ 9.02.2024

CLASA a X-a

Problema I. (7 puncte)

Fie z un număr complex nenul.

a) Demonstrați că, dacă $|z| = \sqrt{5}$, atunci $\frac{z+5}{z} = 1 + \bar{z}$.

b) Demonstrați că, dacă $|z| \leq \sqrt{5}$, atunci $|(2+i)z^3 - iz\sqrt{5}| \leq 30$.

prof. Balica Ioan, Inspectoratul Școlar Județean Cluj

Problema II. (7 puncte)

Fie numerele reale $a > 1$, $b > 1$, $c > 1$. Arătați că:

$$(1 + \log_a b + \log_a c)(1 + \log_b a + \log_b c)(1 + \log_c a + \log_c b) \geq 27.$$

prof. Mădălin Mitrofan, Colegiul Național „Emil Racoviță” Cluj-Napoca

Problema III. (7 puncte)

Determinați valorile reale ale lui x pentru care are loc inegalitatea: $\ln(x-1)\ln(x+1) < (\ln x)^2$.

prof. Aura Buju, Liceul Teoretic „Petru Maior” Gherla

Problema IV. (7 puncte)

Fie M_0, M_1, M_2 imaginile în planul complex ale rădăcinilor ecuației $z^3 = 1$.

Dacă $M(\cos t + i \sin t)$, $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, să se arate că $MM_2 = MM_0 + MM_1$.

prof. Eugen Jecan, Colegiul Național „Andrei Mureșanu” Dej

Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp efectiv de lucru - 3 ore.

SUCCES!