

# OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

## ETAPA LOCALĂ 9.02.2024

### CLASA a XII-a

#### Problema I. (7 puncte)

Fie legea de compoziție "\*" definită pe  $\mathbf{R}$  prin  $x*y = x + y + xy, \forall x, y \in \mathbf{R}$  și funcția  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x + 1$ .

a) Să se arate că legea "\*" este asociativă.

b) Să se verifice relația  $f(x*y) = f(x) \cdot f(y), \forall x, y \in \mathbf{R}$  și să se calculeze  $1 * \frac{1}{2} * \frac{1}{3} * \dots * \frac{1}{2008}$ .

#### Problema II. (7 puncte)

Fie  $(G, \cdot)$  un grup și  $a, b \in G$  astfel încât  $a^2 = b^2 = (ab)^2$ . Să se arate că  $a^{2024} = b^{2020} = e$ .

*prof. Camelia Maria Chindriș, Colegiul Național „Andrei Mureșanu” Dej*  
*prof. Corina Livia Dragoș, Colegiul Național „Andrei Mureșanu” Dej*

#### Problema III. (7 puncte)

Să se arate că 
$$\int_{-1}^1 \frac{x^4 \sqrt{1+\sin x} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)}{e^x \cos x + \frac{\sin 2x}{2\sin x}} dx = \frac{\sqrt{2}}{10}.$$

*prof. Teodor Poenaru*

#### Problema IV. (7 puncte)

Să se calculeze 
$$I(r) = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{1+r \cdot \sin^2 x} dx, r > -2.$$

*prof. Gheorghe Lobonț, Colegiul Național „Emil Racoviță” Cluj-Napoca*

**Toate subiectele sunt obligatorii.**  
**Timp efectiv de lucru - 3 ore.**

**SUCCES!**