

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ, 10.02 2024

CLASA a X-a

Subiectul 1. Se consideră funcțiile $f, g, h: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ cu $h(x) = f(x) + \sqrt{2024}g(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{Q}$.

a) Să se arate că, dacă cel puțin una dintre funcțiile f și g este injectivă, atunci h este injectivă.

b) Dacă h este injectivă, este necesar ca cel puțin una dintre funcțiile f și g să fie injectivă?

Subiectul 2. Fie funcția $f: (0, \infty) \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{\log_{2023} 2024} + 2023^{\log_x 2024}$.

Să se arate că $\{x \in (0, \infty) \setminus \{1\} \mid f(x) \geq 2\} = \{x \in (0, \infty) \setminus \{1\} \mid f(x) \geq 4048\}$.

Subiectul 3. Fie n un număr natural nenul. Să se arate ca numărul $n^2 + 2^{\lceil \log_2 n \rceil}$ se poate scrie ca produs de două numere naturale consecutive dacă și numai dacă n este o putere cu exponent natural a lui 2.

Gazeta Matematică

Subiectul 4. Se consideră numerele complexe a, b, c, d astfel încât $|a| = |b| = |c| = |d| = 1$,

$|a + b + c + d| = \sqrt{2}$ și $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0$. Să se arate că $|a^3 + b^3 + c^3 + d^3| = 2\sqrt{2}$.