

**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ  
BUCUREȘTI, ETAPA LOCALĂ, 10.02.2024****CLASA a 11 -a****SUBIECTE****Problema 1**

Fie  $A$  o matrice pătratică de ordinul 2, cu elemente numere reale și cu proprietatea  $A^3 = I_2$ . Arătați că  $\det A = 1$  și determinați valorile posibile ale sumei elementelor de pe diagonala principală a matricii.

**Problema 2**

a) Arătați că, dacă  $X, Y$  sunt matrice pătratice de ordinul 2, cu elemente numere reale, atunci  $\det(X + Y) + \det(X - Y) = 2(\det X + \det Y)$ .

b) Arătați că, dacă  $A$  și  $B$  sunt matrice pătratice de ordinul 2, cu elemente numere reale, iar  $\det(AB + BA) \leq 0$ , atunci  $\det(A^2 + B^2) \geq 0$ .

**Problema 3**

Fie  $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  o funcție crescătoare, cu proprietatea  $f(f(x)) = \sqrt{x^2 + x}$ .

a) Arătați că  $f(x) > x$ , pentru orice  $x > 0$ .

b) Determinați  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ .

**Problema 4**

Fie  $(a_n)_{n \geq 1}$  un șir descrescător de numere reale nenule, cu  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$  și  $(b_n)_{n \geq 2}$  șirul

definit prin  $b_n = \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} - n$ .

a) Arătați că, dacă  $l > 0$ , atunci șirul  $(b_n)_{n \geq 2}$  este convergent.

b) Folosind eventual inegalitatea  $t - 1 \geq \ln t$ , oricare ar fi numărul real  $t \geq 1$ , arătați că, dacă  $l = 0$ , atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ .