OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ, 10.02 2024

CLASA a XII-a

Subiectul 1. Să se determine primitivele funcției $f:(-3,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x^3e^x}{(x+3)^2}$.

Gazeta Matematică

Subiectul 2. Fie $(G,\cdot)$ un grup. Spunem că un morfism de grupuri $f:G\to G$ are proprietatea (P), dacă există un număr $k\in\mathbb{Z}$ astfel încât $f\left(x^k\right)=x$, pentru orice $x\in G$.

$a)$ Să se arate că, dacă f are proprietatea (P), atunci f este izomorfism.

$b)$ Știind că $(G,\cdot)$ este comutativ, finit, cu n elemente, să se arate că f are proprietatea (P) dacă și numai dacă există $q\in\mathbb{Z}$ cu $(n,q)=1$ astfel încât $f(x)=x^q$, pentru orice $x\in G$.

Subiectul 3. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție care admite o primitivă $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea că $|F(x)|+f(x)=0$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

$a)$ Să se arate că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-e^x$ verifică ipoteza problemei.

$b)$ Să se determine toate funcțiile f care verifică ipoteza problemei.

Subiectul 4. Fie n,k două numere naturale cu $1\le k\le n$, $(G,\cdot)$ un grup cu n elemente și X_0 o submulțime a lui G, cu k elemente. Pentru fiecare $a\in G$ notăm cu $aX_0=\left\{ax \mid x\in X_0\right\}$ și fie $M=\left\{Y\subseteq G \mid \exists a\in G, Y=aX_0\right\}$. Știind că M are cel mult $\dfrac{n}{k}$ elemente, să se arate că G are un subgrup cu k elemente.