

**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ****BUCUREȘTI, ETAPA LOCALĂ, 10.02.2024****CLASA a 9 -a****SUBIECTE****Problema 1**

Pentru fiecare număr natural nenul  $n$  considerăm intervalul  $I_n = \left[ \frac{n+1}{n}, \frac{16n-4}{n+1} \right]$ .

- a) Determinați valorile lui  $n$  pentru care mulțimea  $I_n \cap \mathbb{N}$  are exact 13 elemente.
- b) Determinați numărul minim și numărul maxim de elemente pe care le au mulțimile  $I_n \cap \mathbb{N}$ , pentru  $n = 1, 2, 3, \dots$ .

**Problema 2**

Rezolvați ecuația  $[x[x]] = 1$ , unde  $[a]$  reprezintă partea întreagă a numărului real  $a$ .

**Problema 3**

a) Fie  $S, T, U, V$  patru puncte în plan,  $X$  mijlocul segmentului  $ST$  și  $Y$  mijlocul segmentului  $UV$ . Arătați că  $2\overline{XY} = \overline{SU} + \overline{TV}$ .

b) Fie  $ABCDE$  un pentagon convex și  $F, G, H, I, J, K$  mijloacele segmentelor  $BC$ ,  $CD$ ,  $DE$ ,  $EA$ ,  $GI$ , respectiv  $FH$ . Presupunem că  $J \neq K$ . Arătați că  $JK \parallel AB$ .

**Problema 4**

Arătați că, dacă  $x$  este număr real nenul și  $\{x\} + \left\{ \frac{1}{x} \right\} = 1$ , atunci  $\{x^2\} + \left\{ \frac{1}{x^2} \right\} = 1$ , unde  $\{a\}$  reprezintă partea fracționară a numărului real  $a$ .