Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Națională, Vaslui, 10 mai 2024

CLASA a V-a – soluții

Problema 1. Vom spune despre o fracție zecimală periodică simplă f că are *lungimea redusă* n (unde n este un număr natural nenul) dacă perioada sa are n cifre și f nu poate să fie reprezentată ca fracție zecimală periodică simplă cu o perioadă cu mai puține cifre. De exemplu, $0{,}(223)$ are lungimea redusă 3, iar $0{,}(2323)$ are lungimea redusă 2, deoarece $0{,}(2323) = 0{,}(23)$.

a) Arătați că $f = 0{,}(2) \cdot 0{,}(3)$ este fracție periodică simplă de lungime redusă 3.

b) Există două fracții periodice simple de lungime redusă 1, al căror produs să fie o fracție periodică simplă de lungime redusă 1?

c) Există două fracții periodice simple de lungime redusă 3, al căror produs să fie o fracție periodică simplă de lungime redusă 3?

Soluție. a) $f = 0{,}(2) \cdot 0{,}(3) = \dfrac{2}{9} \cdot \dfrac{3}{9} = \dfrac{2}{27} = 0{,}(074)$ este fracție de lungime redusă 3 ..... **2p**

b) Da, deoarece, de exemplu, $0{,}(3) \cdot 0{,}(6) = 0{,}(2)$ **2p**

c) Da, deoarece, de exemplu, $0{,}(270) \cdot 0{,}(370) = \dfrac{270}{9 \cdot 3 \cdot 37} \cdot \dfrac{370}{999} = \dfrac{100}{999} = 0{,}(100)$ **3p**

Problema 2. Fie $n \geqslant 2$ un număr natural. Considerăm numerele $A = 33\ldots3$, cu n cifre 3 și $B = 20 \cdot A + 6$. Determinați cifrele care apar în scrierea zecimală a numărului $A \cdot B$.

Soluție. Avem $B = 66\ldots6$, cu $n+1$ cifre 6 .... **1p**

Observăm că $3 \cdot A = 99\ldots9 = 10^n - 1$ **2p**

Rezultă $A \cdot B = (10^n - 1) \cdot \underbrace{22\ldots2}_{n+1 \text{ cifre}} = \underbrace{22\ldots2}_{n+1 \text{ cifre}}\underbrace{00\ldots0}_{n \text{ cifre}} - \underbrace{22\ldots2}_{n+1 \text{ cifre}}$ **2p**

Obținem $A \cdot B = \underbrace{22\ldots2}_{n-1 \text{ cifre}}19\underbrace{77\ldots7}_{n-1 \text{ cifre}}8$, deci în scrierea zecimală a numărului $A \cdot B$ apar cifrele 1, 2, 7, 8 și 9 .... **2p**

Problema 3. Determinați perechile de numere naturale nenule a și b care verifică relația $a^{4 \cdot a} = b^b$.

Soluție. Dacă $b \geqslant 4a$, atunci $b > a$, deci $b^b > a^{4a}$, iar inegalitatea este imposibilă în acest caz **1p**

Pentru $b < 4a$ obținem $b^b = a^{4a} = a^{4a-b}a^b$, deci b^b este divizibil cu a^b, ceea ce arată că b este divizibil cu a **2p**

Rezultă că $b = na$, cu $n = 1$ (I), $n = 2$ (II) sau $n = 3$ (III) **1p**

Obținem $(a^4)^a = ((na)^n)^a$, adică $a^4 = n^n a^n$, sau $a^{4-n} = n^n$. În cazul (I) obținem $a = b = 1$, în cazul (II) avem soluția $a = 2$, $b = 4$, iar în cazul (III) obținem $a = 27$, $b = 81$ **3p**

Observație. Din $a^a \mid b^b$ nu reiese $a \mid b$, după cum arată exemplul $4^4 \mid 10^{10}$, dar $4 \nmid 10$.

Problema 4. Fie n un număr natural nenul. Vom spune că o tablă $n \times n$ este *specială* dacă:

- în fiecare căsuță a tablei este pus un număr natural impar, de două cifre;
- numerele de pe tablă sunt diferite două câte două;
- produsul numerelor de pe fiecare linie și produsul numerelor de pe fiecare coloană este pătrat perfect.

Arătați că cea mai mare valoare a lui n pentru care există o tablă specială este 4.

Soluție. Dacă între factorii primi ai numerelor de pe tablă apare $p \geqslant 17$ pe linia ℓ și coloana c, atunci trebuie ca pe linia ℓ să mai apară un multiplu de p (pe coloana $c' \neq c$), pe coloana c să mai apară un multiplu de p (pe linia $\ell' \neq \ell$) și pe poziția (ℓ', c') să mai apară un multiplu de p. Astfel, pe tablă ar trebui să apară un număr $N \geqslant 7p > 100$ – imposibil **1p**

Rezultă că pe tablă nu pot apărea numerele de două cifre care sunt multipli impari de 17 – 3 numere, de 19 – 3 numere, de 23 – 2 numere, de 29 – 2 numere, de 31 – 2 numere și de 37, de 41, de 43, de 47, de 53, de 59, de 61, de 67, de 71, de 73, de 79, de 83, de 89, de 97 – câte un număr; în total, 26 de numere. Cum în total există 45 de numere impare de două cifre, reiese că pe tablă nu pot apărea mai mult de $45 - 26 = 19$ numere, deci $n \leqslant 4$ **2p**

Pentru $n = 4$ trebuie să folosim pe tablă $13 \cdot 1$, $13 \cdot 3$, $13 \cdot 5$, $13 \cdot 7$ și patru multipli ai lui 11 (de exemplu, $11 \cdot 1$, $11 \cdot 3$, $11 \cdot 5$, $11 \cdot 7$) **1p**

Un exemplu de așezare este cel alăturat **3p**

11	$3 \cdot 11$	3^3	5^2
$5 \cdot 11$	$7 \cdot 11$	$3 \cdot 5$	$3 \cdot 7$
7^2	$3 \cdot 5^2$	13	$3 \cdot 13$
$3^2 \cdot 5$	$3^2 \cdot 7$	$5 \cdot 13$	$7 \cdot 13$

Observație. Pentru indicarea, fără explicație, a unei table corecte, se acordă 4 puncte.