CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „A. HAIMOVICI”
– ETAPA LOCALĂ, 08.02.2025 -

CLASA a X-a
SECȚIUNEA H1 – Filiera tehnologică – toate profilurile

SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunț subiect 1:

Se consideră numerele complexe $z_1=(a+b)+(a-b)i$ și $z_2=(a-b)+(a+b)i$, cu $a,b\in\mathbb{R}$.

3p **a)** Arătaţi că $iz_1z_2=-\left|z_1\overline{z_2}\right|$.

4p **b)** Determinaţi numerele $n\in\mathbb{N}$ astfel încât $\frac{z_1}{z_2}+\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n=i$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) $iz_1z_2=i\left[(a+b)+(a-b)i\right]\left[(a-b)+(a+b)i\right]=i^2\left[(a+b)^2+(a-b)^2\right]=-2\left(a^2+b^2\right)$	**1p**
$-\left\|z_1\overline{z_2}\right\|=-\left\|z_1\right\|\left\|\overline{z_2}\right\|=-\left\|z_1\right\|\left\|z_2\right\|=-\left[(a+b)^2+(a-b)^2\right]=-2\left(a^2+b^2\right)$, deci $iz_1z_2=-\left\|z_1\overline{z_2}\right\|$	**2p**
b) $\frac{z_1}{z_2}=i\Rightarrow\frac{z_1}{z_2}+\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n=i+i^2+\ldots+i^n=i\frac{i^n-1}{i-1}$	**2p**
$i\frac{i^n-1}{i-1}=i\Rightarrow\frac{i^n-1}{i-1}=1\Rightarrow i^n=i\Rightarrow n=4k+1,\ k\in\mathbb{N}$	**2p**

Enunț subiect 2:

3p **a)** Arătaţi că $\left(1+\sqrt{2}\right)^4>17+12\sqrt[3]{2}$.

4p **b)** Se consideră numărul real $A=\frac{1}{3}\left[(1+\sqrt{2})^{200}+(3+\sqrt{8})^{100}+(17+\sqrt{288})^{50}\right]$. Determinați $n\in\mathbb{N}$ pentru care $A=(1+\sqrt{2})^n$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) $(1+\sqrt{2})^4=17+\sqrt{288}=17+12\sqrt{2}$	**2p**
$\sqrt{2}>\sqrt[3]{2}\Rightarrow 17+12\sqrt{2}>17+12\sqrt[3]{2}\Rightarrow\left(1+\sqrt{2}\right)^4>17+12\sqrt[3]{2}$	**1p**
b) $A=\frac{1}{3}\left[(1+\sqrt{2})^{200}+\left[(1+\sqrt{2})^2\right]^{100}+\left[(1+\sqrt{22})^4\right]^{50}\right]=\frac{1}{3}\left[(1+\sqrt{2})^{200}+(1+\sqrt{2})^{200}+(1+\sqrt{2})^{200}\right]=$ $=(1+\sqrt{2})^{200}$	**3p**
$(1+\sqrt{2})^{200}=(1+\sqrt{2})^n\Rightarrow n=200$	**1p**

Enunț subiect 3:

7p Se consideră numerele reale $a=\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{6}\right)$, $b=\log_3 5$, $c=\log_9 28$, $d=\log_{27}120$ și $N=3d+b-a-c$. Arătați că $N\in(2;3)$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
$a=\log_3 6$, $c=\log_3\sqrt{28}$, $d=\log_3\sqrt[3]{120}$	**3p**
$N=\log_3\left(\frac{120\cdot 5}{6\cdot 2\sqrt{7}}\right)=\log_3\left(\frac{50}{\sqrt{7}}\right)$	**2p**
$2<N<3 \Leftrightarrow 9<\frac{50}{\sqrt{7}}<27$ $2<\sqrt{7}<3 \Rightarrow \frac{1}{3}<\frac{1}{\sqrt{7}}<\frac{1}{2} \Rightarrow 9<\frac{50}{3}<\frac{50}{\sqrt{7}}<\frac{50}{2}<27$	**2p**

Enunț subiect 4:

În anul 2015, în urma unui recensământ, s-a constatat că într-un oraș erau 90000 de elevi. Numărul acestora scade în fiecare an cu 5%.

3p **a)** Arătați că, în anul 2018, numărul elevilor din oraș a scăzut sub 80000.

2p **b)** Determinați o formulă pentru a exprima numărul de elevi din oraș în funcție de numărul de ani care au trecut începând cu 2015.

2p **c)** După câți ani numărul elevilor din oraș va scădea sub jumătate din numărul elevilor de la momentul recensământului? Utilizați, eventual, faptul că $\lg 95 \simeq 1{,}98$ și $\lg 5 \simeq 0{,}7$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) În 2016 erau $90000\cdot 0{,}95=85500$ elevi În 2017 erau $85500\cdot 0{,}95=81225$ elevi În 2018 erau $81225\cdot 0{,}95=77164<80000$	**1p** **1p** **1p**
b) Dacă y este numărul de elevi și x este numărul de ani, $y=90000\cdot(0{,}95)^x$	**2p**
c) $y<45000 \Leftrightarrow 90000\cdot(0{,}95)^x<45000 \Leftrightarrow (0{,}95)^x<0{,}5 \Leftrightarrow \lg(0{,}95)^x<\lg 0{,}5 \Leftrightarrow$ $x(\lg 95-2)<\lg 5-1$ $x>\frac{0{,}7-1}{1{,}98-2} \Rightarrow x>15$, deci numărul elevilor va scădea sub jumătatea efectivului din 2015 după 15 ani.	**1p** **1p**